



সম্যাকো মননঃ সখিতিঃ সমানী

UNIVERSITY OF NORTH BENGAL
B.Sc. Programme 5th Semester Examination, 2022

DSE1/2/3-P1- MATHEMATICS

Time Allotted: 2 Hours

Full Marks: 60

The figures in the margin indicate full marks.

**The question paper contains paper DSE-1A and DSE-1B.
The candidates are required to answer any *one* from *two* courses.
Candidates should mention it clearly on the Answer Book.**

DSE-1A

MECHANICS

GROUP-A / বিভাগ-ক / সমূহ-ক

1. Answer any *four* questions:

3×4 = 12

যে-কোন চারটি প্রশ্নের উত্তর দাও:

কোন চার প্রশ্নের উত্তর লেখ -

- (a) A particle describes a curve whose equation is $\frac{a}{r} = \theta^2 + b$ under a force to the pole. Find the law of force.

মূলবিন্দু (pole) অভিমুখী বলের দ্বারা কোন একটি কণার ঘূর্ণন বক্রপথটি হল $\frac{a}{r} = \theta^2 + b$. উহার বলের নীতি নির্ণয় কর।

Pole মা এডটা বলকো প্রভাবলে এডটা কণা লে সমিকরণ $\frac{a}{r} = \theta^2 + b$ মএকো বক্র বর্ণন গঠ মনে বলকো নিয়ম নির্ণয় কর।

- (b) Write down the principle of virtual work for a single particle. Explain the term virtual.

কোন একটি কণার ক্ষেত্রে principle of virtual work উল্লেখ কর। Virtual শব্দটির ব্যাখ্যা দাও।

একল কণাকো লাগী Virtual work কো সিদ্ধান্ত লেখ। Virtual কো ব্যাখ্যা কর।

- (c) State the necessary and sufficient condition for the equilibrium of a system of coplanar forces acting on a rigid body.

একটি কঠিন বস্তুর উপর কার্যরত সমতলীয় বলসমূহের সাম্যাবস্থার প্রয়োজনীয় এবং যথাযথ অবস্থাগুলো বর্ণনা কর।

তোস body মা লগইএকো coplanar বলকো, system সন্তুলন হুনে আবশ্যক অনি পর্যাপ্ত condition উল্লেখ কর।

- (d) What do you mean by constrained motion? Write down the principle of conservation of momentum under impulsive forces.

সীমাবদ্ধ গতি (Constrained motion) বলতে কি বোঝে? ঘাতবলের অধীন ভরবেগের সংরক্ষণের নীতি উল্লেখ কর।

Constrained গতি (motion) মনালে কে বুঝিন্ত? আবেগাত্মক বলকো (impulsive force) প্রমাবমা পরেকো গতি (momentum) কো সংরক্ষণকো সিদ্ধান্ত লেখ।

- (e) Explain the terms "Force of Friction" and "the angle of Friction".

ঘর্ষণ বল (Force of Friction) এবং ঘর্ষণ কোণ (the angle of Friction) শব্দদুটির ব্যাখ্যা দাও।

"Force of Friction" অনি "the angle of Friction" শব্দদুটো মানি ব্যাখ্যা কর।

- (f) The algebraic sums of the moments of a system of coplanar forces about points whose co-ordinates are (1, 0), (0, 2) and (2, 3) referred to rectangular axes are h , $2h$ and $3h$ respectively. Find the line of action of the resultant.

আয়তকার অক্ষের সাপেক্ষে (1, 0), (0, 2) এবং (2, 3) বিন্দুগুলোতে অবস্থিত সমতলীয় বলসমূহের পরিবর্তনের হারের গাণিতিক সমষ্টি যথাক্রমে h , $2h$ এবং $3h$ । সমষ্টি বলের কার্যরেখা নির্ণয় কর।

Rectangular অক্ষদ্বয়কে সন্দর্ভমা co-ordinates (1, 0), (0, 2) অনি (2, 3) भएको बिन्दुहरूमा moments of a system of coplanar forces को बीजगणितीय योग फल क्रमै संगले h , $2h$ अनि $3h$ भए, परिणाममुखी को कार्यको रेखा (line of action) निर्णय गर।

GROUP-B / বিভাগ-খ / সমূহ-খ

2. Answer any **four** questions:

6×4 = 24

যে-কোন চারটি প্রশ্নের উত্তর দাও:

কোন চার প্রশ্নের উত্তর লেখ -

- (a) Three forces act along the straight lines $x=0$, $y-z=a$; $y=0$, $z-x=a$; $z=0$, $x-y=a$. Show that if the system reduces to a single force its line of action must lie in the surface $x^2 + y^2 + z^2 - 2yz - 2zx - 2xy = a^2$.

নিম্নলিখিত সরলরেখাসমূহ

$x=0$, $y-z=a$; $y=0$, $z-x=a$; $z=0$, $x-y=a$ এর উপর তিনটি বল কার্যরত। দেখাও যে, যদি বলগুলোকে একটি বলে পরিবর্তিত করা হয় তাহলে ইহার কার্যরেখাটি নিম্নলিখিত বক্রতলের উপরে থাকবে।

$$x^2 + y^2 + z^2 - 2yz - 2zx - 2xy = a^2$$

তিন বলের সরল রেখা $x=0$, $y-z=a$; $y=0$, $z-x=a$; $z=0$, $x-y=a$ মা act गर्छ। यदि system एकल बलमा परिणत हुन्छ भने कार्यको रेखा, सतह

$$x^2 + y^2 + z^2 - 2yz - 2zx - 2xy = a^2$$
 मा निहित हुनुपर्छ भनी प्रमाण गर।

- (b) Obtain the velocity and acceleration of a moving particle referred to rectangular axes OX and OY which are not fixed in space but rotate about the origin in their own plane.

আয়তকার অক্ষ OX এবং OY এর সাপেক্ষে গতিশীল কোন কণা যা শূন্য (space) স্থায়ী নয় কিন্তু নিজ তলে ঘুরতে পারে তার বেগ ও ত্বরণ নির্ণয় কর।

Rectangular অক্ষদ্বয় OX অনি OY को सन्दर्भमा एउटा घुमिरहेको कणको वेग (velocity) अनि प्रवेग (acceleration) निर्णय गर जो space मा स्थिर छैन तर आफ्नै plane मा उत्पत्ति की (origin) अडानमा घुम्छ (rotate)।

- (c) Find the motion of a projectile in a resisting medium in which the resistance varies as velocity.

বাধাপ্রাপ্ত মাধ্যমে উৎক্ষেপনের গতি নির্ণয় কর যেখানে বেগের সাথে বাধার পরিবর্তন ঘটে।

एउटा प्रतिरोधी माध्यममा एउटा प्रक्षेपणको (projectile) गति निर्णय गर जहाँ प्रतिरोध वेग सित गर्छ।

- (d) A particle is projected from an apse at a distance a with the velocity $\mu^{\frac{1}{2}}[(n+1)^{\frac{1}{2}}a^{n+1}]$, the central force being μr^{-2n-3} . Show that the equation of the orbit of the particle is $r^n = a^n \cos n\theta$.

কোন Apse এর a দূরত্ব থেকে একটি কণাকে $\mu^{\frac{1}{2}}[(n+1)^{\frac{1}{2}}a^{n+1}]$ গতিবেগে ছোঁড়া হল। দেখাও যে কণাটির কক্ষপথের সমীকরণ হবে $r^n = a^n \cos n\theta$ ।

এতটা কণা এতটা apse দেখী $\mu^{\frac{1}{2}}[(n+1)^{\frac{1}{2}}a^{n+1}]$ কে বেগলে a দুরত্ব মা প্রক্ষেপিত গর্চ। কেন্দ্রীয় বল μr^{-2n-3} হো। কণাকো কক্ষাকো সমিকরণ $r^n = a^n \cos n\theta$ হো মনী প্রমাণ গর।

- (e) A uniform rod OA of length $2a$, free to turn about its end O , revolves with uniform angular velocity ω about the vertical OZ through O , and inclined at a constant angle α to OZ . Find the value of α .

একটি মসৃণ দণ্ড OA যার দৈর্ঘ্য $2a$, O প্রান্তের সাপেক্ষে ঘুরতে পারে, O প্রান্ত থেকে OZ উল্লম্ব রেখার সাপেক্ষে ω কৌণিক বেগে ঘোরে এবং OZ এর সাথে α ধ্রুবক কোণে অবস্থান করে। তাহলে α এর মান নির্ণয় কর।

$2a$ লম্বাई भएको एउटा समान रड, आफ्नो अन्त्य O माथी घुम्न स्वतन्त्र भएको, O भएर ठाडो OZ माथी समान कोणीय वेग ω ले revolve गर्छ अनि OZ संग स्थिर कोण α ले झुकाउ गर्छ भने को मान निर्णय गर।

- (f) A uniform solid cylinder is placed with its axis horizontal on a plane, whose inclination to the horizon is α . Show that the least coefficient of friction between it and the plane, so that it may roll and not slide, is $\frac{1}{3} \tan \alpha$. If the cylinder be hollow and of small thickness, the least value is $\frac{1}{2} \tan \alpha$.

একটি ভরটি সিলিন্ডারকে তার দিগন্ত অক্ষের সাথে কোন তলে রাখা আছে, দিগন্ত অক্ষের সাথে তার কৌণিক অবস্থান হল α । দেখাও যে সিলিন্ডার এবং তলের মধ্যকার ঘর্ষণ গুণাঙ্কের সর্বনিম্ন মান হবে $\frac{1}{3} \tan \alpha$ যখন দণ্ডটি গড়িয়ে যেতে পারে কিন্তু ঘষতে যাবে না। যদি সিলিন্ডারটি ফাঁপা এবং হালকা হয়, তাহলে ঐ গুণাঙ্ক হবে $\frac{1}{2} \tan \alpha$ ।

एउटा समान ठोस cylinder आफ्नो अक्ष लाई plane मा तेर्सो राखेको छ, जसको horizon तिरको झुकाउ α हो। Plane र यसमा भएको घर्षण को least coefficient, जो पल्टिन्छ तर slide हुदैन, $\frac{1}{3} \tan \alpha$ को मनी प्रमाण गर। यदि cylinder भित्र बाट खोक्रो र कम मोटाई भए, त्यसको least मान $\frac{1}{2} \tan \alpha$ हो मनी प्रमाण गर।

GROUP-C / বিভাগ-গ / समूह-ग

Answer any two questions

12×2 = 24

যে-কোন দুটি প্রশ্নের উত্তর দাও

कुनै दुई प्रश्नहरूको उत्तर लेख

3. (a) Four uniform rods are freely jointed at their extremities to form a parallelogram $ABCD$, which is suspended by the joint A , and is kept in shape by a string AC . Prove that the tension of the string is equal to half the whole weight.

6

চারটি সমদণ্ড তাদের প্রান্তের সাথে মুক্তভাবে একটি সামান্তরিক $ABCD$ আকারে যুক্ত করা আছে। যেটি A প্রান্তের সাপেক্ষে ঝুলানো আছে এবং তার আকার ধরে রাখার জন্য AC স্ট্রিং দ্বারা বাঁধা আছে। প্রমাণ কর যে স্ট্রিং এর টানের মান সমস্ত গুণকের অর্ধেক।

समानान्तर चतुर्भुज $ABCD$ बनाउँन चारवटा समान रडहरू लाई घरम सीमाहरूमा जोडिएको छ, जो A मा झुण्डाएको छ अनि तार AC ले आकार दिइएको छ। त्यस तार को तनाव पूरा औजन भन्दा आधा छ मनी प्रमाण गर।

- (b) Deduce the condition of stability of an orbit which is nearly circular under the action of a central force $F = \phi(u)$, where $u = \frac{1}{r}$.

একটি কক্ষপথের সাম্যাবস্থার শর্ত বের কর যেখানে পথটি $F = \phi(u)$, কেন্দ্রীয় বলের অধীনে প্রায় বৃত্তাকার, যেখানে $u = \frac{1}{r}$ ।

কেন্দ্রীয় বল $F = \phi(u)$, $u = \frac{1}{r}$ কৌ প্রভাৱতঃ এওটা কক্ষা জৌ লগভগ গৌলাকাৱ ভএকৌ চ, ত্যসকৌ স্থিৱতা কৌ condition নিৰ্ণয় গৱ।

4. (a) Prove that any system of forces acting on a rigid body can be reduced to a single force and a couple whose axis lies along the line of action of the force.

প্রমাণ কর যে কোন কঠিন বস্তুর উপর কার্যরত বলসমূহকে একটি একক বল ও Couple এ পরিণত করা যায়, যার অক্ষ বলের কার্যরেখার উপর থাকে।

এওটা ভৌসু body মাথৌ প্রভাৱ পৱেকৌ বলহরুকৌ সমূহ, এওটা একল বল আনি couple মা পরিণত হুন্ড, জসকৌ অক্ষ বলকৌ কাৰ্যকৌ রেখামা অবস্থিত চ, মনী প্রমাণ গৱ।

- (b) Two equal smooth spheres, each of weight W and radius r , are placed inside a hollow cylinder open at both ends which rests on a horizontal plane, if $a(< 2r)$ be the radius of the cylinder, show that the least weight it can have so as not to upset is $2W(1 - \frac{r}{a})$.

সম ওজন W এবং সমব্যাসার্ধ r এর দুটি মসৃণ গোলককে, স্থির অবস্থানে দিগন্ততলে থাকে দু প্রান্ত যুক্ত কোন কাঁপা সিলিন্ডারের ভিতরে রাখা আছে। যদি সিলিন্ডারের ব্যাসার্ধ $a(< 2r)$ হয়, দেখাও যে এটার সর্বনিম্ন ওজন হবে $2W(1 - \frac{r}{a})$ ।

তৌসৌ সমতল মা রাখিএকৌ দুটৌ পটি খুল্লা আনি খৌকৌ cylinder ভিত্ত দুইওটা সমান smooth অণ্ডাবৃত্ত দুটৌকৌ ওজন W আনি ত্রিজ্যা (radius) r চ, রাখিএকৌ চ। যদি $a(< 2r)$ cylinder কৌ ত্রিজ্যা ভএ ত্যসকৌ ওজন কম সে কম $2W(1 - \frac{r}{a})$ হুন্ড মনী প্রমাণ গৱ।

5. (a) Find the moment of inertia of a rigid body about any line, given the moments and products of inertia about three perpendicular axes.

যে কোন রেখার সাপেক্ষে একটি কঠিন বস্তুর moment of inertia বের কর, যেখানে তিনটি লম্ব অক্ষের সাপেক্ষেই তার moments এবং products of inertia দেওয়া আছে।

কুণৌ মনি রেখা মাথৌকৌ ভৌসু body কৌ moment of inertia নিৰ্ণয় গৱ। তিন লম্ববত অক্ষহরুকৌ মাথৌকৌ moment আনি product of inertia দিহএকৌ চ।

- (b) A heavy particle slides down a rough cycloid whose base is horizontal and vertex downwards. Show that if it starts from rest at the cusp and comes to rest at the vertex, then $\mu^2 e^{\mu\pi} = 1$.

একটি অমসৃণ cycloid বরাবর একটি ভারী কণা গড়িয়ে পরছে, cycloid টির পাদদেশ দিগন্ত বরাবর এবং vertex নিম্নমুখী আছে। যদি কণাটি স্থির অবস্থায় cusp থেকে শুরু করে vertex এসে আবার স্থির হয় তবে দেখাও যে $\mu^2 e^{\mu\pi} = 1$ ।

Base তৌসৌ ভএকৌ ২ শীর্ষ তল তির ভএকৌ cycloid মাথৌ এওটা ভাৱী কণ লাই তল স্লাইড গৱঁচ। যদি cusp মা বিশ্রাম দেখৌ শুরু গৱেৱ শীর্ষমা আওঁচ মনে $\mu^2 e^{\mu\pi} = 1$ হুন্ড মনী প্রমাণ গৱ।

6. (a) If a rocket, originally of mass M , throws off every unit of time a mass eM with relative velocity V and if M' be the mass of the case, then show that it cannot rise at once unless $eV > g$, nor at all unless $\frac{eMV}{M'} > g$.

यदि M भन्ने एकटा रकेट यात्रा आपेक्षिक गतिवेग V , प्रति एकक समयमा eM भन्ने छुट्टै फेले एवं यदि आवरणको भन्ने M' छ, तबले देखाओ यो एउटा एकवारो उड्ने पारबोला ना यदि ना $eV > g$ छ
अथवा एकेवारो ना यदि ना $\frac{eMV}{M'} > g$ छ।

यदि मूल रूपमा द्रव्यमान M भएको रकेटले प्रत्येक समयको एकाईमा relative वेग V ले द्रव्यमान eM फ्याँकेछ अनि यो case मा द्रव्यमान M' भए, त्यो एक पल्टको पनि rise हुदैन जब सम्म $eV > g$ न त पटकै rise हुन्छ जब सम्म $\frac{eMV}{M'} > g$ ।

- (b) A body of mass m moving in a straight line encounters a resistance proportional to the velocity and this is the only force acting on the body. If the body starts with velocity V , show that the distance s traversed by it in time t is given by

$$s = \frac{mV}{k} (1 - e^{-kt/m})$$

m भन्ने एकटा वस्तु, कोन बाधा या वस्तुको वेगको समानुपातिक तार विरुद्ध सरलरेखामा चलने थाने एवं ए बाधाई एकमात्र बल यो वस्तुको उपर काज करछे। यदि वस्तु V गतिवेगमा यात्रा शुरू करे,

देखाओ यो t समयमा अतिरिक्त दुरी s को परिमाण हुने $s = \frac{mV}{k} (1 - e^{-kt/m})$

एउटा द्रव्यमान m भएको body सरल रेखा मा चलिरहेको बेला वेग संग proportional प्रतिरोधको सामना हुन्छ अनि body मा यो मात्र बलको प्रभाव हो। यदि वेग V ले body ले शुरू गरे, यसले दूरी s समय t मा पार गरेको हो $s = \frac{mV}{k} (1 - e^{-kt/m})$ भनी प्रमाण गर।

DSE-1B

GROUP THEORY AND LINEAR ALGEBRA

GROUP-A / विभाग-क / समूह-क

1. Answer any **four** questions from the following:

3×4 = 12

निम्नलिखित यो-कोन चारटा प्रश्नको उत्तर दाओः

कुनै चार प्रश्नहरूको उत्तर लेख -

- (a) Express the permutation $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 4 & 5 & 1 & 3 & 2 & 8 & 6 & 7 \end{pmatrix}$ as the product of disjoint cycles. Find the order of the permutation. Determine whether the permutation is even or odd.

1+1+1

$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 4 & 5 & 1 & 3 & 2 & 8 & 6 & 7 \end{pmatrix}$ permutation टिके विच्छिन्न चक्र (disjoint cycles) गुणफल आकारले प्रकाश कर। Permutation टिके युग्म ना अयुग्म ता निर्णय कर।

Permutation $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 4 & 5 & 1 & 3 & 2 & 8 & 6 & 7 \end{pmatrix}$ लाई विच्छेदन (disjoint) cycle हरूको गुणनफल मा परिणत गर। Permutation को order लेख। Permutation सम वा विषम (even or odd) हो निर्धारण गर।

- (b) Let G be the group of all 2×2 non-singular matrices over the real numbers. Find the centre of G .

3

धरा याक, G एकटा सकल 2×2 non-singular वास्तव संख्याको म्याट्रिक्स। G को केन्द्र (centre) निर्णय कर।

मानौ G एउटा 2×2 non-singular वास्तविक संख्याहरूको matrices को group हो। G को केन्द्र (centre) निर्णय गर।

- (c) Show that $\{(0, 1, -2), (1, -1, 1), (1, 2, 1)\}$ are linearly independent in $\mathbb{R}^3(\mathbb{R})$. 3
 দেখাও যে, $\{(0, 1, -2), (1, -1, 1), (1, 2, 1)\}$ সেটটি $\mathbb{R}^3(\mathbb{R})$ -এ রৈখিকভাবে স্বতন্ত্র (linearly independent)।
 $\mathbb{R}^3(\mathbb{R})$ মা $\{(0, 1, -2), (1, -1, 1), (1, 2, 1)\}$ রৈখিক রূপমা স্বতন্ত্র চা মনী প্রমাণ কর।
- (d) Let G be any group. For any elements a, b, x in G , show that $o(a) = o(x^{-1}ax)$. 3
 মনে কর G যে কোন একটি group। G -এর যে কোন উপাদান a, b, x -এর জন্য, দেখাও যে, $o(a) = o(x^{-1}ax)$
 Group G কো কুনৈ পনি elements a, b, x কো লাগী $o(a) = o(x^{-1}ax)$ হুন্ড মনী প্রমাণ কর।
- (e) Find all elements of order 8 in $(\mathbb{Z}_{24}, +_{24})$. 3
 $(\mathbb{Z}_{24}, +_{24})$ -এর 8 ক্রমের (order) সকল উপাদানগুলি নির্ণয় কর।
 $(\mathbb{Z}_{24}, +_{24})$ মা order 8 মএকো সবই element হরু নির্ণয় কর।
- (f) For what values of k , does the set $S = \{(k, 1, k), (0, k, 1), (1, 1, 1)\}$ form a basis of $\mathbb{R}^3$? 3
 k -এর কোন মানের জন্য, $S = \{(k, 1, k), (0, k, 1), (1, 1, 1)\}$ সেটটি $\mathbb{R}^3$ -এর basis গঠন করে।
 k কো কতি মান লে, সেট $S = \{(k, 1, k), (0, k, 1), (1, 1, 1)\}$ $\mathbb{R}^3$ কো basis হুন্ড ?

GROUP-B / বিভাগ-খ / সমূহ-খ

2. Answer any **four** questions from the following 6×4 = 24
 নিম্নলিখিত যে-কোন চারটি প্রশ্নের উত্তর দাওঃ
 কুনৈ চার প্রশ্নহরুকো উত্তর লেখ -
- (a) Prove that every subgroup of a cyclic group is cyclic. 6
 প্রমাণ কর যে, cyclic-এর প্রত্যেকটি subgroup cyclic হবে।
 Cyclic group কো প্রত্যেক উপ group cyclic হো মনী প্রমাণ কর।
- (b) (i) Show that $SL(2, \mathbb{R})$ is a subgroup of $GL(2, \mathbb{R})$. 3+3
 প্রমাণ কর যে, $SL(2, \mathbb{R})$ একটি $GL(2, \mathbb{R})$ -এর subgroup হবে।
 $SL(2, \mathbb{R})$ $GL(2, \mathbb{R})$ কো উপ group হো মনী প্রমাণ কর।
- (ii) Prove that intersection of two normal subgroups of a group is a normal subgroup.
 দেখাও যে, দুটি normal subgroup-এর ছেদ (intersection) একটি normal subgroup হবে।
 কুনৈ group কো দুই normal উপ group কো প্রতিচ্ছদন (intersection) normal উপ group হো মনী প্রমাণ কর।
- (c) (i) Find the centre of the group S_3 . 3+3
 S_3 গ্রুপ (group)-এর কেন্দ্র (centre) নির্ণয় কর।
 Group S_3 কো কেন্দ্র নির্ণয় কর।
- (ii) Prove that a non-empty subset H of a group G is a subgroup of G if and only if $a, b \in H \Rightarrow ab^{-1} \in H$.
 দেখাও যে, একটি অশূন্য উপসেট H তার একটি group G এর subgroup হবে যদি এবং শুধুমাত্র যদি (if and only if) $a, b \in H \Rightarrow ab^{-1} \in H$
 Group G কো খালী নমএকো উপসেট H এডটা উপ group হো যদি আদি যদি মাত্র $a, b \in H \Rightarrow ab^{-1} \in H$ ।

- (d) Find the linear mapping from $\mathbb{R}^3$ to $\mathbb{R}^3$ which has its range subspace spanned by $(1, 0, -1)$ and $(1, 2, 2)$.

6

$\mathbb{R}^3$ থেকে $\mathbb{R}^3$ পর্যন্ত রৈখিক ম্যাপিং (linear mapping) খুঁজে বের কর, যার range subspace টি $(1, 0, -1)$ এবং $(1, 2, 2)$ দ্বারা বিস্তৃত (spanned)।

Subspace को दायरा $(1, 0, -1)$ अनि $(1, 2, 2)$ ले बनिएको रेखिक mapping $\mathbb{R}^3$ देखि $\mathbb{R}^3$ सम्म निर्णय गर।

- (e) Prove that the linear mapping $T: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ defined by $T(1, 2, 3) = (3, -1, 7)$, $T(1, -2, 3) = (3, 3, 3)$ and $T(1, 2, -3) = (3, -1, 1)$ is one-one and onto.

6

প্রমাণ কর যে, $T(1, 2, 3) = (3, -1, 7)$, $T(1, -2, 3) = (3, 3, 3)$ এবং $T(1, 2, -3) = (3, -1, 1)$ দ্বারা সংজ্ঞায়িত (defined) রৈখিক ম্যাপিংটি (linear mapping) একটি one-one এবং onto ম্যাপিং (mapping)।

$T(1, 2, 3) = (3, -1, 7)$, $T(1, -2, 3) = (3, 3, 3)$ অনি $T(1, 2, -3) = (3, -1, 1)$ লে परिभाषित रेखिक mapping $T: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ one-one अनि onto हो मनी प्रमाण गर।

- (f) (i) Let $S = \{(1, 4), (0, 3)\}$ be a subset of $\mathbb{R}^2$. Show that $(3, 3)$ belongs to $L(S)$.

3+3

মনে কর, $S = \{(1, 4), (0, 3)\}$ হল $\mathbb{R}^2$ -এর একটি উপসেট। দেখাও যে, $(3, 3)$, $L(S)$ -এর অন্তর্গত (belongs to)।

मानौ $S = \{(1, 4), (0, 3)\}$ $\mathbb{R}^2$ को उपसेट हो/प्रमाण गर $(3, 3)$ $L(S)$ मा सम्बन्धित छ।

- (ii) If $v_1, v_2, v_3 \in V(\mathbb{F})$, such that $v_1 + v_2 + v_3 = 0$ then show that $\{v_1, v_2\}$ spans the same subspace as $\{v_2, v_3\}$ i.e. show that $L(\{v_1, v_2\}) = L(\{v_2, v_3\})$.

যদি $v_1, v_2, v_3 \in V(\mathbb{F})$ যেখানে, $v_1 + v_2 + v_3 = 0$ তাহলে দেখাও যে, $\{v_1, v_2\}$ এবং $\{v_2, v_3\}$ একই subspace বিস্তৃত (span) করে অর্থাৎ দেখাও যে, $L(\{v_1, v_2\}) = L(\{v_2, v_3\})$

যদি $v_1, v_2, v_3 \in V(\mathbb{F})$ জहाँ $v_1 + v_2 + v_3 = 0$ হো মনে, $\{v_1, v_2\}$ লে $\{v_2, v_3\}$ লে জস্তৈ উপ space span গচ্চ মনী প্রमाण गर अर्थात प्रमाण गर $L(\{v_1, v_2\}) = L(\{v_2, v_3\})$ ।

GROUP-C / বিভাগ-গ / সমূহ-গ

3. Answer any *two* questions from the following

12×2 = 24

নিম্নলিখিত যে-কোন দুটি প্রশ্নের উত্তর দাও:

कुनै दुईवटा प्रश्नहरूको उत्तर लेख -

- (a) (i) Show that $Z(S_n) = \{I\}$ ($n \geq 3$).

3+6+3

দেখাও যে, $Z(S_n) = \{I\}$ ($n \geq 3$)

প্রমাণ কর $Z(S_n) = \{I\}$ ($n \geq 3$)।

- (ii) Prove that HK is subgroup of G iff $HK = KH$.

দেখাও যে, HK , G -এর একটি subgroup হবে যদি এবং শুধুমাত্র যদি (iff) $HK = KH$ হয়।

HK group G को उप group हो यदि अनि यदि मात्र $HK = KH$ हुन्छ मनी प्रमाण गर।

- (iii) Prove that $L(S)$ is the smallest subspace of V containing S .

প্রমাণ কর যে, S কে ধারণ করে এমন ক্ষুদ্রতম subspace টি হল $L(S)$ ।

S लाई contain गर्ने, V को सबैभन्दा सानो उप space $L(S)$ हो मनी प्रमाण गर।

- (b) (i) Show that
- $V = W_1 \oplus W_2 \Leftrightarrow V = W_1 + W_2, W_1 \cap W_2 = \{0\}$
- .

6+3+3

দেখাও যে, $V = W_1 \oplus W_2 \Leftrightarrow V = W_1 + W_2, W_1 \cap W_2 = \{0\}$

প্রমাণ কর $V = W_1 \oplus W_2 \Leftrightarrow V = W_1 + W_2, W_1 \cap W_2 = \{0\}$ ।

- (ii) Prove that a subgroup
- H
- of
- G
- is normal iff
- $Ha \neq Hb \Rightarrow aH \neq bH$
- for
- $a, b \in G$
- .

প্রমাণ কর যে, G -এর subgroup H হল normal যদি এবং শুধুমাত্র যদি (iff) $Ha \neq Hb \Rightarrow aH \neq bH$ যেখানে $a, b \in G$

G को उप group normal हो यदि अनि यदि मात्र $Ha \neq Hb \Rightarrow aH \neq bH$ $a, b \in G$ को लागी।

- (iii) If
- H
- and
- K
- are two normal subgroups of a group
- G
- such that
- $H \cap K = \{e\}$
- then show that
- $hk = kh \forall h \in H, k \in K$
- .

যদি H এবং K , G -এর দুটি এমন normal subgroup, যেখানে $H \cap K = \{e\}$, তাহলে দেখাও যে, $hk = kh \forall h \in H, k \in K$

যদি group G को H अनि K दुईवटा normal उप group मए, जहाँ $H \cap K = \{e\}$, $hk = kh \forall h \in H, k \in K$ हुन्छ भनी प्रमाण गर।

- (c) (i) Prove that every permutation on a finite set is either a cycle or it can be expressed as a product of disjoint cycles.

6+6

প্রমাণ কর যে, সসীম সেটের অন্তর্গত সকল permutation হয় একটি চক্র (cycle) অথবা এটিকে বিচ্ছিন্ন চক্রসমূহের (disjoint cycles) গুণফল আকারে প্রকাশ করা যায়।

সিমেট স্টকো প্রত্যেক permutation যা cycle हो अथवा यसलाई विच्छेदन cycle हरूको गुणनफल मा लेख्न सकिन्छ भनी प्रमाण गर।

- (ii) Show that the set
- $\{1, 1+x, x^2+2x\}$
- is a basis for
- $P_2(\mathbb{R})$
- , the vector space of all polynomials of degree
- ≤ 2
- .

দেখাও যে, $\{1, 1+x, x^2+2x\}$ সেটটি $P_2(\mathbb{R})$ -এর জন্য একটি basis হবে, যেখানে $P_2(\mathbb{R})$ হল বহুপদী যার ক্রম 2-এর কম-র গঠিত vector space।

সেট $\{1, 1+x, x^2+2x\}$ $P_2(\mathbb{R})$ को basis हो भनी प्रमाण गर। $P_2(\mathbb{R})$ degree ≤ 2 भएको बहुपदको vector space हो।

- (d) (i) Prove that every group of prime order is cyclic.

4+4+4

দেখাও যে, সকল মৌলিক ক্রমের group, cyclic হবে।

Order prime भएको प्रत्येक group cyclic हो भनी प्रमाण गर।

- (ii) Let
- α
- and
- β
- belongs to
- S_n
- . Prove that
- $\beta \times \beta^{-1}$
- and
- α
- are both even or both odd.

মনে কর, α এবং β হল S_n -এর অন্তর্গত। দেখাও যে, $\beta \times \beta^{-1}$ এবং α হল উভয়েই যুগ্ম অথবা উভয়েই অযুগ্ম।

মানাও α अनि β S_n मा समावेश गर्छ। $\beta \times \beta^{-1}$ अनि α दुवै सम अथवा विषम हो भनी प्रमाण गर।

- (iii) Show that the vectors
- $(1, 2, 3)$
- ,
- $(0, 1, 2)$
- and
- $(0, 0, 1)$
- generate
- $\mathbb{R}^3$
- .

দেখাও যে, $(1, 2, 3)$, $(0, 1, 2)$ এবং $(0, 0, 1)$ ভেক্টরগুলি দ্বারা $\mathbb{R}^3$ গঠিত (generate) হয়।

$(1, 2, 3)$, $(0, 1, 2)$ अनि $(0, 0, 1)$ ले $\mathbb{R}^3$ लाई उत्पन्न गर्छ भनी प्रमाण गर।

—x—