



সমান্য গণ্য: সমিতি: সমান্য

UNIVERSITY OF NORTH BENGAL
B.Sc. Major 3rd Semester Examination, 2025

MATHMAJ305-MATHEMATICS

GROUP THEORY

Time Allotted: 2 Hours 30 Minutes

Full Marks: 60

*The figures in the margin indicate full marks.
All symbols are of usual significance.*

GROUP-A

1. Answer any *four* questions:

3×4 = 12

- (a) Show that $f: R \rightarrow R$ defined by $f(x) = x^3 - x$, $x \in R$ is surjective but not injective. 3
- (b) Let H be a subgroup of G . Show that $\{aH \mid a \in G\}$ forms a partition of G . 3
- (c) Prove that a non-commutative group of order 8 must have an element of order 4. 3
- (d) Find all homomorphisms of the group $\mathbb{Z}_8$ onto the group $\mathbb{Z}_4$. 3
- (e) Define simple group. Show that a cyclic group of prime order is a simple. 1+2
- (f) Prove that every subgroup of the center of G is a normal subgroup of G . 3

GROUP-B

Answer any *four* questions

6×4 = 24

2. State and prove First Isomorphism theorem. 6
3. Let H be a subgroup of G such that $[G:H] = 2$, show that H is normal in G . Hence deduce that A_{50} is a normal subgroup of S_{50} . 4+2
4. (a) Show that $\mathbb{Z}_{10}$, the additive group of all integers modulo 10 is a cyclic group. Find all generator of $\mathbb{Z}_{10}$. 4
- (b) Show that the group $(Q, +)$ is not cyclic. 2
5. Let G be a group and $a \in G$ such that $o(a) = n$, then prove that for every $m \in \mathbb{N}$
- $$o(a^m) = \frac{n}{\gcd(m, n)}$$
6. If $\alpha = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 3 & 2 & 1 & 5 & 4 \end{pmatrix}$ and $\beta = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 2 & 4 & 3 & 5 & 1 \end{pmatrix}$ in S_5 , find a permutation ν in S_5 such that $\alpha\nu = \beta$. 6

7. Prove that any two left cosets of a subgroup H in a group G are either identical or disjoint. 6

GROUP-C

Answer any two questions

12×2 = 24

8. (a) Prove that a subgroup H of a group G is normal iff $aHa^{-1} = H$ for all $a \in G$. 6
 (b) Is the mapping $f: \mathbb{R} \rightarrow (-1, 1)$ defined by $f(x) = \frac{x}{1+|x|}$ for all $x \in \mathbb{R}$ bijective? 6
 Justify your answer.
9. (a) Show that every subgroup of a cyclic group is cyclic. 6
 (b) Define poset. 2
 (c) Let $G = (\mathbb{C}, +)$ and $G' = (\mathbb{R}, +)$ and $\phi: G \rightarrow G'$ is defined by $\phi(a+ib) = a$. Prove that ϕ is a homomorphism and find $\ker \phi$. 4
10. (a) Prove that a finite group G is cyclic iff there exists an element $a \in G$ such that $\langle a \rangle = G$. 8
 (b) Let H be a subgroup of a group G . Define $N(H) = \{g \in G \mid gHg^{-1} = H\}$, where $gHg^{-1} = \{ghg^{-1} \mid h \in H\}$. Show $N(H)$ is a subgroup of G . What is $N(H)$ called? 3+1
11. (a) Let G be a group and H, K be two subgroups of G . Prove that HK is a subgroup of G iff $HK = KH$, where $HK = \{hk \mid h \in H, k \in K\}$. 6
 (b) Using group theory prove that $(1320)^6 \equiv 1 \pmod{7}$. 6

—x—



সম্মান মন্ত্র: সখিতি: সম্মানী

UNIVERSITY OF NORTH BENGAL

B.Sc. Major 3rd Semester Examination, 2025

MATHMAJ306-MATHEMATICS

THEORY OF REAL AND COMPLEX FUNCTIONS

Time Allotted: 2 Hours 30 Minutes

Full Marks: 60

The figures in the margin indicate full marks.

GROUP-A

1. Answer any *four* questions: 3×4 = 12
- (a) Show that $\lim_{x \rightarrow 0} f(x)$ does not exist where $f(x) = \sin 1/x$, $x \neq 0$. 3
- (b) A function $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ is continuous on $\mathbb{R}$ and $f(x) = 0$ for all $x \in \mathbb{Q}$. Prove that $f(x) = 0$ for all $x \in \mathbb{R}$. 3
- (c) Prove that between any two real roots of the equation $e^x \cos x + 1 = 0$ there is atleast one real root of the equation $e^x \sin x + 1 = 0$. 3
- (d) Find the bilinear transformation which transforms the points $z = 2, 1, 0$ into $w = 1, 0, i$ respectively. 3
- (e) Let $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ be a function such that $|f(x) - f(y)| \leq (x - y)^2$ for all $x, y \in \mathbb{R}$. Then prove that f is a constant function on $\mathbb{R}$. 3
- (f) For each $n \in \mathbb{N}$, let $f_n(x) = 1 - \frac{x^n}{n}$, $x \in [0, 1]$. Show that the sequence $\{f_n(x)\}$ is uniformly convergent on $[0, 1]$. 3

GROUP-B

2. Answer any *four* questions: 6×4 = 24
- (a) Let $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ be a continuous function on $\mathbb{R}$ and $f(x+y) = f(x) \cdot f(y)$ for all $x, y \in \mathbb{R}$. Show that either $f(x) = 0 \quad \forall x \in \mathbb{R}$ or $f(x) = a^x \quad \forall x \in \mathbb{R}$, where a is some positive real number. 6
- (b) Consider a function $f: \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ defined by 6

$$f(z) = \begin{cases} 0 & , \text{ when } z = 0 \\ \frac{x^3 - y^3}{x^2 + y^2} + i \frac{x^3 + y^3}{x^2 + y^2} & , \text{ when } z \neq 0 \end{cases}$$

Show that the function f satisfies the Cauchy-Riemann equations at the origin, but f is not differentiable at $z = 0$.

- (c) Define uniform continuity of a function prove that

6

$$f(x) = \sin 1/x, \quad x \neq 0$$

$$= 0, \quad x = 0$$

is not uniformly continuous on $[0, \infty)$.

- (d) Find the points of local maximum and minimum of the function
- f
- , where

6

$$f(x) = \frac{x^2 - 3x + 4}{x^2 + 3x + 1}, \quad x \in \mathbb{R}$$

- (e) State and prove Taylor's theorem with Lagrange's form of remainder.

6

- (f) Discuss the uniform convergence of the series
- $1 + \frac{e^{-2x}}{2^2 - 1} + \frac{e^{-4x}}{4^2 - 1} + \frac{e^{-6x}}{6^2 - 1} + \dots$
- for all
- $x \geq 0$
- .

6

GROUP-C

3. Answer any
- two*
- questions:

12×2 = 24

- (a) (i) State and prove sequential criterion for continuity.

6

- (ii) Use mean value theorem to prove that
- $\frac{x}{1+x^2} < \tan^{-1} x < x, \forall x > 0$
- .

6

- (b) (i) Prove that the sequence
- $f_n(x) = \frac{nx}{1+nx}, x \geq 0$
- is not uniformly convergent on
- $[0, \infty)$
- , but the convergence is uniform on
- $[a, \infty)$
- if
- $a > 0$
- .

6

- (ii) State Weierstrass M-test for series of functions. Show that the series
- $\sum \frac{1}{n^3 + n^4 x^2}$
- is uniformly convergent for all real
- x
- .

6

- (c) (i) Show that Cauchy-Riemann equations are necessary conditions for analyticity of a function but not sufficient. Can one define analytic real valued function of real variable? If possible then define.

4+2

- (ii) Find the Maclaurin's infinite series expansion of the function
- $f(x) = (1+x)^m, x \in \mathbb{R}$
- .

6

- (d) (i) Find the analytic function of which the real part is

6

$$e^{-x} \{(x^2 - y^2) \cos y + 2xy \sin y\}$$

- (ii) If
- $f(x) = \sin x$
- , prove that
- $\lim_{h \rightarrow 0} \theta = \frac{1}{\sqrt{3}}$
- , where
- θ
- is given by

3

$$f(h) = f(0) + hf'(\theta h), \quad 0 < \theta < 1$$

- (iii) Using Cauchy's principle show that
- $\lim_{x \rightarrow 0} x \cos 1/x = 0$
- .

3

—x—



সমানী মন্ত্র: সমিতি: সমানী

UNIVERSITY OF NORTH BENGAL
B.Sc. Minor/Dsc 3rd Semester Examination, 2025

MATHMIN303/MATHDSC303-MATHEMATICS

REAL ANALYSIS

Time Allotted: 2 Hours 30 Minutes

Full Marks: 60

The figures in the margin indicate full marks.

GROUP-A / বিভাগ-ক / সমূহ-ক

1. Answer any *four* questions from the following: 3×4 = 12

নিম্নলিখিত প্রশ্নগুলির মধ্যে যে-কোন চারটি প্রশ্নের উত্তর দাও:

কোন চার প্রশ্নের উত্তর দেও:

- (a) Examine whether $\log_{10} 5$ represents a rational number or not. 3

যাচাই করো $\log_{10} 5$ মূলদ সংখ্যা কিনা। $\log_{10} 5$ লে rational সংখ্যা কো প্রতিনিধিত্ব গঠ, জাঁচ গর।

- (b) Test the convergence of the series $\frac{1}{1 \cdot 2^2} + \frac{1}{2 \cdot 3^2} + \frac{1}{3 \cdot 4^2} + \dots$. 3

 $\frac{1}{1 \cdot 2^2} + \frac{1}{2 \cdot 3^2} + \frac{1}{3 \cdot 4^2} + \dots$ শ্রেণীটি অভিসারী কিনা যাচাই করো।শ্রেণীক্রম $\frac{1}{1 \cdot 2^2} + \frac{1}{2 \cdot 3^2} + \frac{1}{3 \cdot 4^2} + \dots$ কো অভিকেন্দ্রনকো জাঁচ গর।

- (c) If A be a non-empty bounded subset of $\mathbb{R}$, then prove that $\inf A \leq \sup A$. 3

 A যদি $\mathbb{R}$ -এর non-empty bounded উপসেট হয়, তাহলে প্রমাণ করো $\inf A \leq \sup A$ ।যদি A $\mathbb{R}$ কো রিত্তো নমণকো পরিবদ্ধ উপসমুচ্চয় হো মনে $\inf A \leq \sup A$ প্রমাণ গর।

- (d) Check whether the set $\left\{-1 + \frac{1}{n} : n \in \mathbb{N}\right\}$ is closed or not. 3

যাচাই করো $\left\{-1 + \frac{1}{n} : n \in \mathbb{N}\right\}$ সেটটি closed কিনা।সমুচ্চয় $\left\{-1 + \frac{1}{n} : n \in \mathbb{N}\right\}$ বন্ধ চ বা চেন মনী জাঁচ গর।

- (e) Verify Bolzano-Weierstrass theorem for the set $\left\{\frac{n}{n+1} : n \in \mathbb{N}\right\}$. 3

 $\left\{\frac{n}{n+1} : n \in \mathbb{N}\right\}$ সেটের ক্ষেত্রে Bolzano-Weierstrass উপপাদ্যটি যাচাই করো।

Bolzano-Weierstrass উপপাদ্য লাই সমুচ্চয় $\left\{ \frac{n}{n+1} : n \in \mathbb{N} \right\}$ কো লাগী ন্যায্যোচিত गर।

(f) Prove that $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ is an enumerable set.

3

প্রমাণ করো $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ একটি enumerable সেট।
 $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ এডটা গনিনে সমুচ্চয় হো ধনী প্রমাণ गर।

GROUP-B / বিভাগ-খ / সমূহ-খ

2. Answer any *four* questions from the following:

6×4 = 24

নিম্নলিখিত প্রশ্নগুলির মধ্যে যে-কোন চারটি প্রশ্নের উত্তর দাওঃ
 কুনৈ চার প্রশ্নহরুকো উত্তর দেও:

(a) Show that the union of an arbitrary collection of open sets in $\mathbb{R}$ is an open set. Is the intersection of an infinite number of open sets in $\mathbb{R}$ open? Justify with proper explanation.

4+2

দেখাও যে, $\mathbb{R}$ -এর যে-কোন open set-এর union, open set হয়। $\mathbb{R}$ -এর অসংখ্য open set-এর intersection, open set হবে কি? উপযুক্ত কারণসহ ব্যাখ্যা করো।

$\mathbb{R}$ মা open সমুচ্চয়কো স্বেচ্ছ সংগ্রহ কো সংঘ এডটা open সমুচ্চয় হো ধনী প্রমাণ দেখাও কে $\mathbb{R}$ মা open সমুচ্চয়হরুকো অনন্ত সংখ্যকো প্রতিষ্ঠেদন এডটা open সমুচ্চয় হুন্ট। আপনো উত্তরকো ন্যায্যোচিত गर।

(b) Let g be the collection of open intervals $I_n = \{x \in \mathbb{R} : -n < x < n\}$, where $n \in \mathbb{N}$. Show that the collection g is an open cover of the set $\mathbb{Q}$. Also, show that there is no finite subcollection of the family g that can cover the set $\mathbb{Q}$.

3+3

ধরা যাক g হল $I_n = \{x \in \mathbb{R} : -n < x < n\}$, যেখানে $n \in \mathbb{N}$, open বিস্তারের সংকলন। দেখাও যে, g সংকলনটি $\mathbb{Q}$ সেটের open cover। আবার, দেখাও যে, g সংকলনটির এমন কোন সসীম উপসংকলন নেই যেটা $\mathbb{Q}$ -কে cover করছে।

মানো g open অন্তরালহরুকো $I_n = \{x \in \mathbb{R} : -n < x < n\}$ সংগ্রহ হো, জহা $n \in \mathbb{N}$ । সংগ্রহ g সমুচ্চয় $\mathbb{Q}$ কো এডটা open cover হো ধনী প্রমাণ गर। $\mathbb{Q}$ লাই cover গনৈ g কো কুনৈ পনি সিমিত উপ সংগ্রহ ঠেন ধনৈর পনি প্রমাণ गर।

(c) State and prove Archimedean property.

1+5

Archimedean property-টি বিবৃত করো এবং প্রমাণ করো।

Archimedean কো গুণ উল্লেখ অনি প্রমাণ गर।

(d) Test the convergence of the series $1 + \frac{3}{2!} + \frac{5}{3!} + \frac{7}{4!} + \dots$

6

$1 + \frac{3}{2!} + \frac{5}{3!} + \frac{7}{4!} + \dots$ শ্রেণীটি অভিসারী কিনা যাচাই করো।

শ্রেণীক্রম $1 + \frac{3}{2!} + \frac{5}{3!} + \frac{7}{4!} + \dots$ কো অধিকেন্দ্রন জাঁচ गर।

(e) Prove that the sequence $\{x_n : n \in \mathbb{N}\}$ defined by $x_1 = \sqrt{6}$ and $x_{n+1} = \sqrt{x_n + 6}$ for all $n \geq 1$ converges to 3.

6

প্রমাণ করো যে $\{x_n : n \in \mathbb{N}\}$ sequence-টি যেখানে $x_1 = \sqrt{6}$ এবং $x_{n+1} = \sqrt{x_n + 6}$, $\forall n \geq 1$, 3-তে অভিসারিত হয়।

$x_1 = \sqrt{6}$ र $x_{n+1} = \sqrt{x_n + 6}$, $n \geq 1$ ले परिभाषित अनुक्रम $\{x_n : n \in \mathbb{N}\}$ 3 मा अभिकेन्द्रित हुन्छ भनी प्रमाण गर।

(f) Prove that every subset of a countable set is countable.

6

प्रमाण करो, countable सेट-एर ये-कान उपसेट countable ह्य।

गणनीय समुच्चय को प्रत्येक उप समुच्चय गणनीय हो भनी प्रमाण गर।

GROUP-C / विभाग-ग / समूह-ग

3. Answer any *two* questions from the following:

12×2 = 24

निम्नलिखित प्रश्नहरूमध्ये ये-कान दुई प्रश्नहरू उत्तर दाओः

कुनै दुई प्रश्नहरूको उत्तर देऊः

(a) (i) Prove that every bounded infinite subset of $\mathbb{R}$ has atleast one limit point in $\mathbb{R}$.

6

प्रमाण करो, $\mathbb{R}$ -एर ये-कान bounded असम उपसेटहरू कम्पक्षे एकटि limit point $\mathbb{R}$ -ए आछे।

$\mathbb{R}$ को प्रत्येक परिबद्ध अनन्त उप समुच्चयको कम से कम एउटा $\mathbb{R}$ मा limit बिन्दु छ भनी प्रमाण गर।

(ii) Prove that $\left\{ \left(1 + \frac{1}{n} \right)^n : n \in \mathbb{N} \right\}$ is a monotone increasing sequence and bounded above.

3+3

प्रमाण करो, $\left\{ \left(1 + \frac{1}{n} \right)^n : n \in \mathbb{N} \right\}$ sequence-टि monotonically increasing एबर bounded above।

$\left\{ \left(1 + \frac{1}{n} \right)^n : n \in \mathbb{N} \right\}$ एउटा एकै क्रमले बढ्ने श्रेणीक्रम अनि परिबद्ध above हो भनी प्रमाण गर।

(b) (i) Let S be a subset of $\mathbb{R}$. Prove that $\bar{S} = S \cup S'$, S' being the derived set of S .

6

धरा याक S हल $\mathbb{R}$ -एर एकटि उपसेट, प्रमाण करो $\bar{S} = S \cup S'$ येथाने S' हल S -एर derived set।

मानौ S $\mathbb{R}$ को उपसमुच्चय हो। $\bar{S} = S \cup S'$, जहाँ S' एउटा अवकलन समुच्चय हो, भनी प्रमाण गर।

(ii) Show that an absolutely convergent series is convergent. Is the converse true? Justify with proper reason.

4+2

देखाओ ये, एकटि absolutely अभिसारी श्रेणी अभिसारी। विपरीत कि सता ? यथायथ कारण सहकारे युक्ति दाओ।

एउटा परम अभिकेन्द्रित श्रेणीक्रम अभिकेन्द्रित हुन्छ भनी प्रमाण गर। के यसको विलोम सत्य हुन्छ ? उचित कारण दिएर न्यायोचित गर।

(c) (i) State and prove density property of $\mathbb{R}$.

2+4

$\mathbb{R}$ -एर density property-टि बिबृत एबर प्रमाण करो।

$\mathbb{R}$ को घनत्व गुण उल्लेख अनि प्रमाण गर।

- (ii) Let G be an open set in $\mathbb{R}$. Prove that the complement of G (in $\mathbb{R}$) is a closed set in $\mathbb{R}$. 4

ধরা যাক G হল $\mathbb{R}$ -এর একটি open set। প্রমাণ করো, G -এর complement হল $\mathbb{R}$ -এ একটি closed set।

মানো G $\mathbb{R}$ মা এডটা open সমুচ্চয় হো। G (in $\mathbb{R}$) কো পুরক $\mathbb{R}$ মা বন্ধ সমুচ্চয় হো ধনী প্রমাণ गर।

- (iii) Show that the series $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n!}$ is convergent. 2

দেখাও $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n!}$ শ্রেণীটি অভিসারী।

শ্রেণীক্রম $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n!}$ অধিকেন্দ্রিত ছ ধনী প্রমাণ गर।

- (d) (i) Prove that every Cauchy sequence of real numbers is convergent. 6

প্রমাণ করো, বাস্তব সংখ্যার যে-কোন Cauchy sequence হল convergent sequence।

বাস্তবিক সংখ্যাहरूको प्रत्येक Cauchy अनुक्रम अधिकেন্দ्रीत हुन्छ धनी प्रमाण गर।

- (ii) Let S be a bounded subset of $\mathbb{R}$ and T be a non-empty subset of S . Prove that $\inf S \leq \inf T \leq \sup T \leq \sup S$ 4

ধরা যাক S হল $\mathbb{R}$ -এর একটি bounded উপসেট এবং T হল S -এর একটি non-empty উপসেট। প্রমাণ করো,

$$\inf S \leq \inf T \leq \sup T \leq \sup S$$

মানো S $\mathbb{R}$ কো পরিবদ্ধ উপ সমুচ্চয় অনি T S কো এডটা রিত্তো নধएको উপ সমুচ্চয় হো। প্রমাণ गर।

$$\inf S \leq \inf T \leq \sup T \leq \sup S$$

- (iii) Examine the convergence of the series $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sqrt{n+1} - \sqrt{n-1}}{n}$. 2

$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sqrt{n+1} - \sqrt{n-1}}{n}$ শ্রেণীটি অভিসারী কিনা যাচাই করো।

শ্রেণীক্রম $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sqrt{n+1} - \sqrt{n-1}}{n}$ কো অধিকেন্দ্রনকো জাঁচ गर।

—x—



সমানো মন্ত্র সমিতি: সমানী

UNIVERSITY OF NORTH BENGAL

B.Sc. Minor 3rd Semester Examination, 2025

UMATMIN20002-MATHEMATICS

CALCULUS, GEOMETRY AND GROUP THEORY

Time Allotted: 2 Hours 30 Minutes

Full Marks: 60

The figures in the margin indicate full marks.

GROUP-A / বিভাগ-ক / সমূহ-ক

1. Answer any
- four*
- questions:

3×4 = 12

নিম্নলিখিত যে-কোন চারটি প্রশ্নের উত্তর দাও:

কোন চারটি প্রশ্নের উত্তর দেও:

- (a) Evaluate
- $I_n = \int_0^{\pi/2} \cos^n x \, dx$
- .

3

 $I_n = \int_0^{\pi/2} \cos^n x \, dx$ -এর মান নির্ণয় কর।মূল্যায়ন কর: $I_n = \int_0^{\pi/2} \cos^n x \, dx$

- (b) Find
- y_4
- , when
- $y = e^x \cdot x^3$
- .

3

 y_4 নির্ণয় কর যেখানে $y = e^x \cdot x^3$. $y = e^x \cdot x^3$ ধরে, y_4 পতা লগাও।

- (c) Evaluate
- $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - e^{-x} - 2x}{x - \sin x}$
- .

3

 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - e^{-x} - 2x}{x - \sin x}$ -এর মান নির্ণয় কর।মূল্যায়ন কর $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - e^{-x} - 2x}{x - \sin x}$ ।

- (d) Establish the nature of the curve

3

$$11x^2 + 4xy + 14y^2 - 26x - 32y + 23 = 0$$

Curve-টির প্রকৃতি নির্ণয় কর

$$11x^2 + 4xy + 14y^2 - 26x - 32y + 23 = 0$$

বক্র $11x^2 + 4xy + 14y^2 - 26x - 32y + 23 = 0$ কো স্বরূপ স্থাপনা কর।

(e) Find the nature of the conic $\frac{8}{r} = 4 - 5 \cos \theta$.

3

Conic $\frac{8}{r} = 4 - 5 \cos \theta$ -এর প্রকৃতি নির্ণয় কর।

শাঙ্কব $\frac{8}{r} = 4 - 5 \cos \theta$ কো স্বরূপ পতা লগাউ।

(f) If $(ab)^2 = a^2b^2$, $\forall a, b \in G$, then prove that G is abelian group.

3

যদি $(ab)^2 = a^2b^2$, $\forall a, b \in G$, তবে প্রমাণ কর যে G একটি আবিলিয়ান (Abelian) group।

যদি $(ab)^2 = a^2b^2$, $\forall a, b \in G$ মপ, প্রমাণ গর G এক অবেলী (abelian) সমূহ হো।

GROUP-B / বিভাগ-খ / সমূহ-খ

2. Answer any *four* questions:

6×4 = 24

নিম্নলিখিত যে-কোন চারটি প্রশ্নের উত্তর দাও:

কুনৈ চারবটা প্রশ্নহলকা উত্তর দেউ:

(a) Prove that the intersection of two subgroups of a group $(G, \circ)$ is a subgroup.

6

প্রমাণ কর যে, যে-কোন group $(G, \circ)$ -এর দুইটি subgroup-এর intersection একটি subgroup হবে।

প্রমাণ গর কি দুই উপসমূহহলকা প্রতিচ্চেন এক উপসমূহ হুন্ট।

(b) Reduce the equation $x^2 - 2xy + 2y^2 - 4x - 6y + 8 = 0$ to its canonical form, determine the nature of the conics.

6

সমীকরণ $x^2 - 2xy + 2y^2 - 4x - 6y + 8 = 0$ -কে canonical form-এ রূপান্তর কর এবং conic-এর প্রকৃতি নির্ণয় কর।

সমীকরণ $x^2 - 2xy + 2y^2 - 4x - 6y + 8 = 0$ লাই যসকো মানক রূপমা পরিণত গর, শাঙ্কব কো স্বরূপ নির্ধারণ গর।

(c) Find the equation of the plane passing through the points $(1, 1, 2)$ and $(2, 4, 3)$ and perpendicular to the plane $x - 3y + 7z + 5 = 0$.

6

সমতলের সমীকরণ নির্ণয় কর যা বিন্দু $(1, 1, 2)$ এবং $(2, 4, 3)$ -এর মধ্য দিয়ে অতিক্রম করে এবং $x - 3y + 7z + 5 = 0$ সমতলের লম্ব (perpendicular) হবে।

সমতল $x - 3y + 7z + 5 = 0$ সাঁগ লম্ব মপকো অনি বিন্দুহলকা $(1, 1, 2)$ অনি $(2, 4, 3)$ মপার পার হুনে সমতল কো সমীকরণ পতা লগাউ।

(d) If $y^{1/m} + y^{-1/m} = 2x$, prove that $(x^2 - 1)y_{n+2} + (2n + 1)xy_{n+1} + (n^2 - m^2)y_n = 0$.

6

যদি $y^{1/m} + y^{-1/m} = 2x$ হয়, তবে প্রমাণ কর যে,

$$(x^2 - 1)y_{n+2} + (2n + 1)xy_{n+1} + (n^2 - m^2)y_n = 0$$

যদি $y^{1/m} + y^{-1/m} = 2x$ মপ, প্রমাণ গর $(x^2 - 1)y_{n+2} + (2n + 1)xy_{n+1} + (n^2 - m^2)y_n = 0$.

(e) Find the asymptotes of $y^3 + x^2y + 2xy^2 - y + 1 = 0$.

6

$y^3 + x^2y + 2xy^2 - y + 1 = 0$ বক্ররেখাটির asymptote-গুলি নির্ণয় কর।

$y^3 + x^2y + 2xy^2 - y + 1 = 0$ কো অনন্তস্পর্শী হল পতা লগাউ।

- (f) Find the area enclosed by the ellipse $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$.

6

উপবৃত্ত $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ দ্বারা আবদ্ধ ক্ষেত্রের ক্ষেত্রফল নির্ণয় কর।

দীর্ঘবৃত্ত $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ দ্বারা পরিবদ্ধ ক্ষেত্র কো ক্ষেত্রফল পতা लगाऊ।

GROUP-C / বিভাগ-গ / সমূহ-গ

3. Answer any *two* questions:

12×2 = 24

নিম্নলিখিত যে-কোন দুটি প্রশ্নের উত্তর দাও:

কোন দুইটি প্রশ্নের উত্তর দেও:

- (a) (i) Find the radius of curvature of the curve $x = a(\theta + \sin \theta)$, $y = a(1 - \cos \theta)$, at $\theta = 0$.

6

Curve $x = a(\theta + \sin \theta)$, $y = a(1 - \cos \theta)$ -এর $\theta = 0$ -তে radius of curvature নির্ণয় কর।

বক্র $x = a(\theta + \sin \theta)$, $y = a(1 - \cos \theta)$ কো বক্রতা-রাজ্য $\theta = 0$ মা পতা लगाऊ।

- (ii) Find the envelope of the family of straight lines $\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1$, where parameters

6

a and b are connected by $a^3 + b^3 = c^3$ (c is constant).

$\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1$ সরলরেখা সমূহের envelope-টি নির্ণয় কর, যেখানে a এবং b ধ্রুবকস্বরূপ $a^3 + b^3 = c^3$ সম্পর্ক দ্বারা সংযুক্ত (যেখানে c একটি ধ্রুবক)।

সরল রেখা-কুল $\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1$ কো এনবেলপ (envelope) পতা लगाऊ, जहाँ $a^3 + b^3 = c^3$ द्वारा संबद्ध प्राचल हरू a , b हुन अनि c एक स्थिराङ्क हो।

- (b) (i) If $I_n = \int_0^{\pi/4} \tan^n x \, dx$, show that $I_{n+1} + I_{n-1} = \frac{1}{n}$.

6

যদি $I_n = \int_0^{\pi/4} \tan^n x \, dx$, তবে দেখাও যে $I_{n+1} + I_{n-1} = \frac{1}{n}$.

যদি $I_n = \int_0^{\pi/4} \tan^n x \, dx$ মএ দেখাऊ $I_{n+1} + I_{n-1} = \frac{1}{n}$ ।

- (ii) The circle $x^2 + y^2 = a^2$ revolves about the x -axis, show that the volume of the sphere thus generated are $\frac{4}{3}\pi a^3$.

6

$x^2 + y^2 = a^2$ বৃত্তটি x -অক্ষের চারদিকে ঘূর্ণায়মান, তবে দেখাও যে উৎপন্ন sphere-টির আয়তন $\frac{4}{3}\pi a^3$ ।

বৃত্ত $x^2 + y^2 = a^2$ x -অক্ষ কো বরিপরি ঘুম্छ। यसरी उत्पन्न भएको गोलाको आयतन $\frac{4}{3}\pi a^3$ हुन्छ भनि देखाऊ।

- (c) (i) Find the equation of the sphere having the circle $x^2 + y^2 + z^2 = 9$, $x - 2y + 2z = 5$ for a great circle. Determine its centre and radius. 6

সেই গোলকের (sphere) সমীকরণ নির্ণয় কর যার $x^2 + y^2 + z^2 = 9$, $x - 2y + 2z = 5$ বৃত্তটি একটি বৃহৎ বৃত্ত (great circle) হয়। সেই গোলকের কেন্দ্র ও ব্যাসার্ধ নির্ণয় কর।

বৃহৎ বৃত্ত $x^2 + y^2 + z^2 = 9$, $x - 2y + 2z = 5$ भएको गोलाको समीकरण पत्ता लगाऊ । यसको केन्द्र अनि त्रिज्या निर्धारण गर ।

- (ii) Show that the semi-latus rectum of a conic is a harmonic mean between the segments of any focal chord. 6

দেখাও যে কনিকের (Conic) সেমি-ল্যাটাস রেকটাম (Semi-latus rectum) যে-কোন focal chord-এর segment-এর মধ্যের হারমোনিক গড়।

कुनै नाभीय जीवा (focal chord) को अनुभाग मान्न शाङ्कव को अर्ध नाभिलंब (semi-latus rectum) एक सममेलीय मध्यमान हुन्छ भनि देखाऊ ।

- (d) (i) Let $(G, \circ)$ be a group. Show that a non-empty subset H of G forms a subgroup of $(G, \circ)$ if and only if $a \in H, b \in H \Rightarrow a \circ b^{-1} \in H$. 6

ধরা যাক $(G, \circ)$ একটি group। দেখাও যে G -এর একটি non-empty subset H একটি G -এর subgroup হবে যদি এবং শুধুমাত্র যদি (iff) $a \in H, b \in H \Rightarrow a \circ b^{-1} \in H$ ।

$(G, \circ)$ এক সমূহ হও। দেখাऊ कि G को एउटा खाली नभएको उपसमुच्चय एक उपसमूह हुन्छ यदि अनि मात्र यदि $a \in H, b \in H \Rightarrow a \circ b^{-1} \in H$ भए।

- (ii) If $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 2x + a \sin x}{x^3}$ be finite, find the value of a and the limit. 6

যদি $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 2x + a \sin x}{x^3}$ সসীম (finite) হয়, তবে a -এর মান নির্ণয় কর এবং limit-এর মান নির্ণয় কর।

यदि $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 2x + a \sin x}{x^3}$ परिमित भए, a को मान अनि सीमांत मान पत्ता लगाऊ ।

—x—