



সমান্য মন্ত্র: সমিতি: সমান্য

UNIVERSITY OF NORTH BENGAL

B.Sc. Minor 3rd Semester Examination, 2024

UMATMIN20002-MATHEMATICS

CALCULUS, GEOMETRY AND GROUP THEORY

Time Allotted: 2 Hours 30 Minutes

Full Marks: 60

The figures in the margin indicate full marks.

GROUP-A / বিভাগ-ক / সমূহ-ক

1. Answer any *four* questions:

3×4 = 12

যে-কোন চারটি প্রশ্নের উত্তর দাও:

কোন চার প্রশ্নের উত্তর দেও:

(a) If $(a+bx)e^{y/x} = x$, prove that:

3

 $(a+bx)e^{y/x} = x$ হলে, প্রমাণ কর যে, $(a+bx)e^{y/x} = x$ হলে, প্রমাণ কর:

$$x^3 \frac{d^2 y}{dx^2} = \left(x \frac{dy}{dx} - y \right)^2$$

(b) Determine the points of intersection of the line $\frac{x+2}{-1} = \frac{y+4}{-2} = \frac{z-3}{1}$ and the

3

cylinder $x^2 + z^2 = 1$. $\frac{x+2}{-1} = \frac{y+4}{-2} = \frac{z-3}{1}$ সরলরেখা ও $x^2 + z^2 = 1$ চোঙের ছেদবিন্দু নির্ণয় কর।রেখা $\frac{x+2}{-1} = \frac{y+4}{-2} = \frac{z-3}{1}$ অনি cylinder $x^2 + z^2 = 1$ কো প্রতিচ্চদন বিন্দু নির্ণয় কর।(c) Find the value of a such that $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{a \sin x - \sin 2x}{\tan^3 x}$ exists and its value is 1.

3

 a -এর মান নির্ণয় কর যখন $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{a \sin x - \sin 2x}{\tan^3 x}$ -এর অস্তিত্ব আছে এবং এর মান 1। $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{a \sin x - \sin 2x}{\tan^3 x}$ কো মান 1 পাউন সকে a কো মান নির্ণয় কর।(d) Find the envelope of the family of straight lines $y = mx + a\sqrt{1+m^2}$, where m is a parameter.

3

 $y = mx + a\sqrt{1+m^2}$, যেখানে m একটি প্রাচল, সরলরেখা সমষ্টির envelope নির্ণয় কর।সরলরেখাসমূহ $y = mx + a\sqrt{1+m^2}$ কো পরিস্পর্শক নির্ণয় কর। (m এডটা প্রাচল হো)

- (e) Find all elements of order 8 in the group $(\mathbb{Z}_{24}, +)$.
 $(\mathbb{Z}_{24}, +)$ group-এর 8 order-এর উপাদানগুলি নির্ণয় কর।
 সমূহ $(\mathbb{Z}_{24}, +)$ মা 8 order भएको सबै तत्वहरू निर्णय गर।

3

- (f) Evaluate: $\int_0^{\pi/2} \sin^8 x \cos^6 x \, dx$

3

$\int_0^{\pi/2} \sin^8 x \cos^6 x \, dx$ -এর মান নির্ণয় কর।
 $\int_0^{\pi/2} \sin^8 x \cos^6 x \, dx$ को मान निर्णय गर।

GROUP-B / বিভাগ-খ / সমূহ-খ

2. Answer any *four* questions:

6×4 = 24

যে-কোন চারটি প্রশ্নের উত্তর দাও:

कुनै चार प्रश्नका उत्तर देऊ:

- (a) Find the asymptotes of the curve $x^3 + 3x^2y - 4y^3 - x + y + 3 = 0$.

6

$x^3 + 3x^2y - 4y^3 - x + y + 3 = 0$ বক্ররেখার asymptote গুলি নির্ণয় কর।

বক্র $x^3 + 3x^2y - 4y^3 - x + y + 3 = 0$ को अनन्त स्पर्शकहरू निर्णय गर।

- (b) If $y = e^{2\sin^{-1}x}$, prove that $(1-x^2)y_{n+2} - (2n+1)xy_{n+1} - (n^2+4)y_n = 0$.

4+2

Also, show that $(y_7)_0 = 2 \cdot 5 \cdot 13 \cdot 29$.

$y = e^{2\sin^{-1}x}$ হলে প্রমাণ কর যে, $(1-x^2)y_{n+2} - (2n+1)xy_{n+1} - (n^2+4)y_n = 0$ । অতঃপর দেখাও যে $(y_7)_0 = 2 \cdot 5 \cdot 13 \cdot 29$ ।

$y = e^{2\sin^{-1}x}$ भए प्रमाण गर: $(1-x^2)y_{n+2} - (2n+1)xy_{n+1} - (n^2+4)y_n = 0$ । फेरि $(y_7)_0 = 2 \cdot 5 \cdot 13 \cdot 29$ हुन्छ भनी प्रमाण गर।

- (c) Show that the straight line $\frac{l}{r} = A \cos \theta + B \sin \theta$ touches the conic $\frac{l}{r} = 1 + e \cos \theta$ if $(A-e)^2 + B^2 = 1$.

6

দেখাও যে $\frac{l}{r} = A \cos \theta + B \sin \theta$ সরলরেখা $\frac{l}{r} = 1 + e \cos \theta$ বক্ররেখাকে স্পর্শ করবে যদি $(A-e)^2 + B^2 = 1$ হয়।

সরল রেখা $\frac{l}{r} = A \cos \theta + B \sin \theta$ ले शकु $\frac{l}{r} = 1 + e \cos \theta$ लाई स्पर्श गरे प्रमाण गर : $(A-e)^2 + B^2 = 1$ ।

- (d) Prove that every permutation on a finite set is either a cycle or it can be expressed as a product of disjoint cycles.

6

প্রমাণ কর যে, একটি সসীম সেট-এর উপর প্রত্যেক permutation একটি cycle অথবা একে disjoint cycle-এর গুণফল হিসাবে প্রকাশ করা যাবে।

एउटा सीमित सेटमाथि हुने हरेक क्रमपरिवर्तन (permutation) कि एउटा चक्र (cycle) or अलग अलग चक्रहरूको गुणनफल हुन्छ भनी प्रमाण गर।

- (e) Show that $20x^2 + 15xy + 9x + 3y + 1 = 0$ represents a pair of intersecting straight lines which are equidistant from the origin. 6

দেখাও যে $20x^2 + 15xy + 9x + 3y + 1 = 0$ একজোড়া পরস্পরছেদী সরলরেখাকে নির্দেশ করে যারা মূলবিন্দু থেকে সমদূরত্বে অবস্থিত।

$20x^2 + 15xy + 9x + 3y + 1 = 0$ লে দুইবটা প্রতিচ্ছেদন হুনে সরল রেখাহলু দর্শাউঁচ জো মূলবিন্দুদেখি সমান দুরীমা রহন্ত্ত মনী প্রমাণ গর।

- (f) Find the equation of the cone whose vertex is at the point (1, 2, 3) and guiding curve is the circle $x^2 + y^2 + z^2 = 9$, $x + y + z = 1$. 6

একটি শঙ্কুর সমীকরণ নির্ণয় কর যার শীর্ষবিন্দু (1, 2, 3) এবং guiding বক্র $x^2 + y^2 + z^2 = 9$, $x + y + z = 1$ একটি বৃত্ত।

(1, 2, 3) মা vertex হুনে শঙ্কুको সমীকরণ নির্ণয় গর জসকো মার্গদর্শী বক্র চাইছি $x^2 + y^2 + z^2 = 9$, $x + y + z = 1$ বৃত্ত হো।

GROUP-C / বিভাগ-গ / সমূহ-গ

3. Answer any *two* questions: 12×2 = 24

যে-কোন দুটি প্রশ্নের উত্তর দাও:

কুনে দুইবটা প্রশ্নকা উত্তর দেউ:

- (a) (i) Find the volume of the solid generated by the revolution of the cardioid $r = a(1 + \cos\theta)$ about the polar axis. 6

মের অক্ষের চতুর্দিকে ঘূর্ণনের ফলে $r = a(1 + \cos\theta)$ cardioide দ্বারা গঠিত solid-এর আয়তন নির্ণয় কর।

cardioide $r = a(1 + \cos\theta)$ লাই ঘূর্ণীয় অক্ষকো সাপেক্ষমা ঘুমাউঁচ উত্পন্ন হুনে তোসকো আয়তন নির্ণয় গর।

- (ii) Show that the set $S = \{1, 2, 3, 4\}$ forms a group for the operation multiplication modulo 5. 6

দেখাও যে, $S = \{1, 2, 3, 4\}$ সেটটি multiplication modulo 5-এর অধীনে একটি group তৈরী করে।

সেট $S = \{1, 2, 3, 4\}$ লে গুণনখণ্ড modulo 5 সঁগ এউটা সমূহ বনাউঁচ মনী প্রমাণ গর।

- (b) (i) Discuss the nature of the conic represented by $9x^2 - 24xy + 16y^2 - 18x - 101y + 19 = 0$ and reduce it to canonical form. 2+4

$9x^2 - 24xy + 16y^2 - 18x - 101y + 19 = 0$ and reduce it to canonical form.

$9x^2 - 24xy + 16y^2 - 18x - 101y + 19 = 0$ সমীকরণ দ্বারা গঠিত conic-এর প্রকৃতি বর্ণনা কর এবং এর canonical আকারটি নির্ণয় কর।

শঙ্কু $9x^2 - 24xy + 16y^2 - 18x - 101y + 19 = 0$ কো প্রকৃতি নির্ণয় গর সাথে ত্যসলাই canonical রূপমা পরিণত গর।

- (ii) Define point of inflection. Find the points of inflection if any, of the curve $x = (\log_e y)^3$. 2+4

Inflection বিন্দুর সংজ্ঞা দাও। $x = (\log_e y)^3$ বক্ররেখার inflection বিন্দু নির্ণয় কর, যদি অস্তিত্ব থাকে।

Inflection বিন্দুকো পরিমাণা দেউ। বক্র $x = (\log_e y)^3$ কো Inflection বিন্দু পাইন্ত্ত মনে নির্ণয় গর।

- (c) (i) Show that for the ellipse $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$, the radius of curvature at an extremity of the major axis is equal to half the latus rectum. 6

দেখাও যে, $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ উপবৃত্তের পরাক্ষের প্রান্তবিন্দুতে বক্রতা ব্যাসার্ধের মান নাভিলম্বের অর্ধেক।

অণ্ডবৃত্ত $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ কো প্রমুখ অক্ষকো চরম বিন্দুমা বক্রতা কো ব্যাসার্ধ নাভি লম্ব (latus rectum) কো আধা হুন্ট ভনী প্রমাণ গর।

- (ii) Prove that the centres of spheres, which touch the straight lines $y = mx$, $z = c$ and $y = -mx$, $z = -c$, lie on the surface $mxy + cz(1 + m^2) = 0$. 6

প্রমাণ কর যে, যে সকল গোলক $y = mx$, $z = c$ এবং $y = -mx$, $z = -c$ সরলরেখাদ্বয়কে স্পর্শ করে তাদের কেন্দ্রগুলি $mxy + cz(1 + m^2) = 0$ তলে অবস্থিত।

সরল রেখাহরু $y = mx$, $z = c$ অনি $y = -mx$, $z = -c$ লাই স্পর্শ গর্নে গোলকহরুকো কেন্দ্রবিন্দুহরু সতহ $mxy + cz(1 + m^2) = 0$ মা রহন্ট ভনী প্রমাণ গর।

- (d) (i) If $I_n = \int_0^{\pi/2} \cos^n x \, dx$ where n is a positive integer show that $I_n = \frac{n-1}{n} I_{n-2}$. 4+2

Hence find the value of $\int_0^1 \frac{x^7}{\sqrt{1-x^4}} \, dx$.

যদি $I_n = \int_0^{\pi/2} \cos^n x \, dx$ হয়, যেখানে n হল ধনাত্মক পূর্ণ সংখ্যা, তাহলে দেখাও যে,

$$I_n = \frac{n-1}{n} I_{n-2} \text{। অতঃপর, } \int_0^1 \frac{x^7}{\sqrt{1-x^4}} \, dx \text{-এর মান নির্ণয় কর।}$$

n এডটা ধনাত্মক পূর্ণসংখ্যা ভএ অনি $I_n = \int_0^{\pi/2} \cos^n x \, dx$ ভএ প্রমাণ গর: $I_n = \frac{n-1}{n} I_{n-2}$

ফেরি $\int_0^1 \frac{x^7}{\sqrt{1-x^4}} \, dx$ কো মান নির্ণয় গর।

- (ii) Let $(G, \cdot)$ be a group. Prove that a non empty subset H of G forms a subgroup of $(G, \cdot)$ if and only if $a \in H$, $b \in H \Rightarrow a \cdot b^{-1} \in H$. 6

ধর, $(G, \cdot)$ একটি group, প্রমাণ কর যে, G -এর একটি অশূন্য subset H , $(G, \cdot)$ -এর একটি subgroup গঠন করে যদি এবং একমাত্র যদি $a \in H$, $b \in H \Rightarrow a \cdot b^{-1} \in H$ ।

মানিলেউ $(G, \cdot)$ এডটা সমূহ হও অনি H যসকো এডটা অরিত্ত উপসেট হও। প্রমাণ গর $a \in H$, $b \in H \Rightarrow a \cdot b^{-1} \in H$ ভএ মাত্র (iff) G কো H এডটা উপসমূহ হুন্ট ভনী প্রমাণ গর।

—x—



সম্মানো মন্ত্র: সমিতি: সমানী

UNIVERSITY OF NORTH BENGAL

SEC 3rd Semester Examination, 2024

SEC - UMATSEC23003-MATHEMATICS

Time Allotted: 2 Hours

Full Marks: 40

The figures in the margin indicate full marks.

GROUP-A

1. Answer any *five* questions:

1×5 = 5

- Write the values of 2.3×10^{-7} and 0.68×10^{12} in standard exponential form.
- Convert the following into the corresponding C-statement:

$$e^x \cos x + x^n - 5 \tan^{-1} x$$
- Write the C-statements for "If x is greater than or equal to y , then store 1 in z ; otherwise store 0 in z ".
- Write a C-program to find whether a given number is divisible by 2.
- What are the values of $2/5$ and $2/5.0$?
- What is the use of 'goto' statement?
- Which Loop tests the condition after having executed the statements within the Loop?
- What is the difference between " $i++$ " and " $++i$ "?

GROUP-B

Answer any *three* questions

5×3 = 15

- Write a C-program to input 1000 numbers and sort them in descending order.
- What is the use of `printf()` and `scanf()` in C language?
 - Write a short note on logical operator.
- Write a C-program to find the roots of a quadratic equation.
- Compare 'break' and 'continue' in terms of their functions.
 - Distinguish between high-level language and low-level language.
- Write a C-program to calculate the factorial value of a given natural number.

GROUP-C

Answer any *two* questions

10×2 = 20

7. (a) Explain the significance of the header files `math.h` and `stdio.h`. 3+7
 (b) Write a C-program to find the product of two matrices of orders 3×4 and 4×5.

8. (a) Why keywords cannot be used as variable names? 2+8
 (b) Write a C-program to calculate the sum of the series

$$1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \dots$$

upto 1000 terms at $x = 2.7$.

9. (a) Write a C-program to generate first 500 terms of the Fibonacci sequence. 7+3
 (b) Distinguish between user-defined functions and standard built-in functions.

- 10.(a) Draw a flow chart to find whether a year is a leap year. 4+6
 (b) Write a C-program to check whether a given natural number is prime.

_____x_____



সম্মানো যন্ত্র: সমিতি: সম্মানী

UNIVERSITY OF NORTH BENGAL

B.Sc. Major 3rd Semester Examination, 2024

UMATMAJ23004-MATHEMATICS

DIFFERENTIAL EQUATIONS

Time Allotted: 2 Hours 30 Minutes

Full Marks: 60

The figures in the margin indicate full marks.

GROUP-A

1. Answer any **four** questions from the following:

3×4 = 12

(a) What is an integrating factor? Show that the number of integrating factor of a differential equation is infinite.

(b) Construct a differential equation by the elimination of the arbitrary constant a and b from $ax^2 + by^2 = 1$.

(c) Determine the nature of the critical point of

$$\dot{x} = x + 3y$$

$$\dot{y} = 3x + y, \text{ where } \dot{} = \frac{d}{dt}$$

(d) State Lipschitz condition. Check whether the function $f(x, y) = xy^2$ satisfies Lipschitz condition on the region $|x| \leq 1$, $|y| \leq 1$.(e) Show that e^x and xe^x are linearly independent solutions of the differential equation

$$\frac{d^2 y}{dx^2} - 2 \frac{dy}{dx} + y = 0$$

(f) Show that $x^2 y$ is an integrating factor of $3y dx + 2x dy = 0$.

GROUP-B

2. Answer any **four** questions from the following:

6×4 = 24

(a) Define autonomous system. Find the critical points and trajectories of the system

$$\frac{dx}{dt} = 6 - 3y, \quad \frac{dy}{dt} = -12 + 3x^2$$

(b) Solve: $x^3 \frac{d^3 y}{dx^3} - 6x \frac{dy}{dx} + 12y = 0$

(c) Obtain the power series solution of the differential equation

$$\frac{d^2 y}{dx^2} + 3x \frac{dy}{dx} + 3y = 0 \text{ about } x = 0.$$

(d) Solve: $x^2 \frac{d^2 y}{dx^2} + x \frac{dy}{dx} + y = 4 \sin(\log x)$

(e) If $x^\alpha y^\beta$ be an integrating factor of the equation

$$(2y dx + 3x dy) + 2xy(3y dx + 4x dy) = 0,$$

then find α and β .

(f) Solve: $\frac{d^2 y}{dx^2} - 2 \frac{dy}{dx} + y = x^2 e^{3x}$

GROUP-C

Answer any two questions from the following

12×2 = 24

3. (a) Solve by the method of variation of parameter

6+6

$$\frac{d^2 y}{dx^2} + y = \sec x$$

(b) Solve $(D^2 - 2D + 4)y = (x + x^3)e^{2x}$ by the method of undetermined coefficient.

4. (a) Solve: $\frac{dx}{dt} = 7x - y$

6+6

$$\frac{dy}{dt} = 2x + 5y$$

(b) Solve $\frac{d^2 y}{dx^2} - \frac{2}{x} \frac{dy}{dx} + \left(a^2 + \frac{2}{x^2}\right)y = 0$ reducing to normal form.

5. (a) Find the eigen values and eigen functions of $\frac{d^2 y}{dx^2} + \lambda y = 0$ satisfying the boundary condition $y_1(0) = 0 = y_1(\pi) = 0$.

6+6

(b) Reduce the equation $xp^2 - xyp + x + 2y = 0$ to Clairaut's form by using $x^2 = u$ and $y - x = v$ and hence solve it. $\left(p = \frac{dy}{dx}\right)$

6. (a) Show that $\frac{1}{3x^3 y^3}$ is an integrating factor of

6+6

$$y(xy + 2x^2 y^2) dx + x(xy - x^2 y^2) dy = 0$$

(b) Reduce $\frac{dy}{dx} = 1 - x(y - x) - x^3(y - x)^3$ to a linear form and hence solve it.

—x—



‘সম্মানো মনঃ সমিতিঃ সমানী’

UNIVERSITY OF NORTH BENGAL

B.Sc. Major 3rd Semester Examination, 2024

UMATMAJ23005-MATHEMATICS

GROUP THEORY

Time Allotted: 2 Hours 30 Minutes

Full Marks: 60

The figures in the margin indicate full marks.

GROUP-A

- I. Answer any *four* questions: 3×4 = 12
- (a) Show that the map $f: (\mathbb{R}, +) \rightarrow (\mathbb{R}^+, \cdot)$ defined by $f(x) = e^x$ is an isomorphism, 3
where $\mathbb{R}$ and $\mathbb{R}^+$ respectively denote the set of real numbers and set of positive real numbers.
- (b) Find all the odd permutations in S_3 . 3
- (c) Write down the composition table for the dihedral group D_4 . 3
- (d) If H and K are normal subgroups of a group G , prove that $H \cap K$ is a normal subgroup of G . 3
- (e) Define Poset with a suitable example. 3
- (f) Give an example of a map which is injective but not surjective. 3

GROUP-B

Answer any *four* questions

6×4 = 24

2. (a) Let $f: G \rightarrow G'$ be a group homomorphism. Prove that $\ker f$ is a normal subgroup of G . 3+3
- (b) Construct a cyclic group with m elements, where m is a positive integer.
3. Show that the centre $Z(G)$ is a subgroup of a group G . Also show that $Z(G) = G$ iff G is commutative. 6
4. Show that the map $f: \mathbb{Q} \rightarrow \mathbb{Q}$ defined by $f(x) = 3x + 2$ is bijective. Also find f^{-1} . ($\mathbb{Q}$ denotes the set of rational numbers). 4+2
5. State and prove Cayley's Theorem. 6

6. (a) Let G be a group of finite order n and $a \in G$. Prove that $o(a)$ divides n and $a^n = e$. 2+4
 (b) If p be a prime number and a is any integer not divisible by p , then prove that $a^{p-1} \equiv 1 \pmod{p}$.
7. Show that the group $(\mathbb{Z}_6, +)$ is a homomorphic image of the group $(\mathbb{Z}, +)$. 6

GROUP-C

Answer any two questions

12×2 = 24

8. (a) Let $(G, \circ)$ be a semigroup and for $a, b \in G$ each of the equations $a \circ x = b$ and $y \circ a = b$ has a solution in G . Then prove that $(G, \circ)$ is a group. 7+5
 (b) Draw the composition table for the group of unit Quaternions Q_8 .
9. (a) Let $\phi: G \rightarrow G'$ be a group homomorphism. Prove that for $a \in G$, $\phi(a^n) = (\phi(a))^n$, $n \in \mathbb{Z}$. 3+3+6
 (b) If $G = \langle a \rangle$ for a group G , then prove that $G = \langle a^{-1} \rangle$, where $a \in G$.
 (c) Prove that a cyclic group of finite order n has exactly one subgroup of order d for every positive divisor d of n .
10. (a) Prove that S_3 is a non-commutative group having six elements. 6+6
 (b) Find all the groups of order 4.
11. (a) Let a be an element of finite order n in a group G . Then prove that $a^m = e$ iff n divides m . 4+5+3
 (b) Prove that the order of a cyclic group is the same as the order of its generator.
 (c) Let $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ be defined by
- $$f(x) = x^2 + 1, \quad \forall x \in \mathbb{R}$$
- Find $f^{-1}(-8)$.
 ($\mathbb{R}$ denotes the set of real numbers).

— x —