



সমানো মন্ত্র: সমিতি: সমানী

UNIVERSITY OF NORTH BENGAL

B.Sc. Major 1st Semester Examination, 2024

MATHMAJ101-MATHEMATICS

CLASSICAL ALGEBRA AND MATRIX THEORY

Time Allotted: 2 Hours 30 Minutes

Full Marks: 60

The figures in the margin indicate full marks.

GROUP-A

1. Answer any *four* questions:

3×4 = 12

(a) Find two integers u and v satisfying $54u + 24v = 30$.

3

(b) Find all real values of α for which the rank of the matrix

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & -1 & \alpha \\ 5 & 7 & 1 & \alpha^2 \end{pmatrix}$$

3

is 2.

(c) Find the remainder on division of 17^{17} by 8.

3

(d) Find the solution of the equation $1^z = 2$.

3

(e) Check if $a^k \equiv b^k \pmod{m}$ imply $a \equiv b \pmod{m}$.

3

(f) Find the number of real roots of the equation $x^4 - 6x^3 + 10x^2 - 6x + 1 = 0$.

3

GROUP-B

Answer any *four* questions

6×4 = 24

2. Prove that the equation $x^n - qx^{n-m} + r = 0$ has two equal roots if

6

$$\left\{ \frac{q}{n}(n-m) \right\}^n = \left\{ \frac{r}{m}(n-m) \right\}^m$$

3. For distinct positive integers a, b, c, d show that

6

$$\frac{a}{b} + \frac{b}{c} + \frac{c}{d} + \frac{d}{a} > 4$$

4. Find the rank of

$$\begin{pmatrix} x & -1 & -1 \\ -1 & x & -1 \\ -1 & -1 & x \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

when $x \neq -1$ and when $x = -1$.

6

5. Find the roots of the equation $x^3 - 3x + 1 = 0$.

6

6. Find the characteristic equation of the matrix $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 2 & -2 & 1 \\ 3 & 5 & 6 \end{pmatrix}$ and show that the matrix A satisfies its characteristic equation. 6
7. State the fundamental theorem of arithmetic. Prove that the eighth power of any integer is of the form $17k$ or $17k \pm 1$ where k is a positive integer. 6

GROUP-C

Answer any two questions

12×2 = 24

8. (a) Solve the equation $2x^4 + 6x^3 - 3x^2 + 2 = 0$ by Ferrari's method. 6
- (b) Let A and B be two real orthogonal matrices of same order and $\det A + \det B = 0$. Show that $A + B$ is singular. 6
9. (a) Solve the system of linear congruence
 $x \equiv 1 \pmod{3}, x \equiv 2 \pmod{5}, x \equiv 3 \pmod{7}$ 6
- (b) If P and Q are non-singular matrices, show that $\begin{pmatrix} P & 0 \\ 0 & Q \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} P^{-1} & 0 \\ 0 & Q^{-1} \end{pmatrix}$. 6
10. (a) If $\lambda \neq 0$ is an eigen value of a nonsingular matrix A then show that $\frac{1}{\lambda}$ is an eigen value of A^{-1} . 3
- (b) If λ_1 and λ_2 are two distinct eigen values of a real symmetric 3×3 matrix and v_1, v_2 are eigen vectors corresponding to λ_1 and λ_2 then find scalar product of v_1 and v_2 . 4
- (c) Show that $AM \geq GM \geq HM$. When are they equal? 4+1
11. (a) Prove that any nonempty subset of the set of natural numbers has a least element. 6
- (b) For what values of λ and μ the following system of equations
 $-4x + 2y - 9z = 2, 3x + 4y + z = 5, 3x + 4y + \lambda z = \mu$
 has (i) no solution (ii) a unique solution and (iii) infinitely many solutions over the field of rational numbers. 6

—x—



‘সমানো মন্ত্র: সপিলি: সমানী’

UNIVERSITY OF NORTH BENGAL

B.Sc. Major 1st Semester Examination, 2024

MATHMAJ102-MATHEMATICS

CALCULUS AND GEOMETRY

Time Allotted: 2 Hours 30 Minutes

Full Marks: 60

The figures in the margin indicate full marks.

GROUP-A

1. Answer any **four** questions from the following:

3×4 = 12

(a) If $I_n = \int_0^{\pi/4} \tan x \, dx$, show that $I_n + I_{n-2} = \frac{1}{n-1}$. 3

(b) Find a and b in order that $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{a \sin 2x - b \sin x}{x^3} = 1$. 3

(c) Obtain the equation of the sphere for which the circle $x^2 + y^2 + z^2 + 7y - 2z + 2 = 0$; $2x + 3y + 4z = 8$ is a great circle. 3

(d) Find the points of inflexion, if any, of the curve $x = (\log y)^3$. 3

(e) Show that the length of the focal chord of the conic $\frac{l}{r} = 1 - e \cos \theta$ which is inclined to the initial line at an angle α is

$$\frac{2l}{1 - e^2 \cos^2 \alpha}$$

(f) Show that the envelope of a family of circles whose centres lie on the rectangular hyperbola $xy = c^2$ and which pass through its centre is 3

$$(x^2 + y^2)^2 = 16c^2 xy$$

GROUP-B

2. Answer any **four** questions from the following:

6×4 = 24

(a) Find the range of the values of x for which 6

$$y = x^4 - 6x^3 + 12x^2 + 5x + 7$$

is concave upward or downward.

(b) Determine the asymptotes for the curve 6

$$x^4 - 5x^2y^2 + 4y^4 + x^2 - 2y^2 + 2x + y + 7 = 0$$

- (c) Show that the equation of the tangent to the conic $\frac{l}{r} = 1 + e \cos \theta$ parallel to the tangent at $\theta = \alpha$ is given by

$$l(e^2 + 2e \cos \alpha + 1) = r(e^2 - 1) [\cos(\theta - \alpha) + e \cos \theta]$$
 6
- (d) Find the equation of the cylinder whose generators touch the spheres $x^2 + y^2 + z^2 = 4$ and are perpendicular to the plane $x + y - 2z = 8$. 6
- (e) (i) State Leibnitz's theorem on successive derivatives. 2
 (ii) If $y = a \cos(\log x) + b \sin(\log x)$, show that 4

$$x^2 y_{n+2} + (2n+1)xy_{n+1} + (n^2+1)y_n = 0$$
- (f) Show that the entire area of the astroid 6

$$x^{2/3} + y^{2/3} = a^{2/3} \text{ is } \frac{3}{8} \pi a^2$$

GROUP-C

3. Answer any *two* questions from the following: 12×2 = 24
- (a) (i) If by a rotation of co-ordinate axes, the expression $ax^2 + 2hxy + by^2 + 2gx + 2fy + c = 0$ is changed to $a'x'^2 + 2h'x'y' + b'y'^2 + 2g'x' + 2f'y' + c' = 0$, then prove that

$$a' + b' = a + b \quad \text{and} \quad a'b' - h'^2 = ab - h^2$$
 6
- (ii) Show that the distance between two points in two dimensional plane does not change under translation and rotation of co-ordinate axes. 6
- (b) (i) A sphere S has points $(0, 1, 0)$ and $(3, -5, 2)$ as the opposite ends of a diameter. Show that the equation of the sphere on which the intersection of the plane $5x - 2y + 4z + 7 = 0$ with the sphere S in a great circle is $x^2 + y^2 + z^2 + 2x + 2y + 2z + 2 = 0$. 6
- (ii) Prove that the pedal equation of the curve $r^m = a^m \sin m\theta + b^m \cos m\theta$ is

$$r^{m+1} = p\sqrt{a^{2m} + b^{2m}}$$
 6
- (c) (i) If $\frac{x}{1} = \frac{y}{2} = \frac{z}{3}$ represent one set of three mutually perpendicular generators of the cone $5yz - 8zx - 3xy = 0$, find the equations of the other two generators. 6
- (ii) Reduce the equation $x^2 + 4xy + 4y^2 - 20x + 10y - 50 = 0$ to canonical form and determine the conic represented by it. 6
- (d) (i) Find the length of the cardioid $r = a(1 - \cos \theta)$ lying outside the circle $r = a \cos \theta$. 6
- (ii) If ρ_1 and ρ_2 be the radii of curvature at the ends of two conjugate diameters of an ellipse, prove that

$$(\rho_1^{2/3} + \rho_2^{2/3})(ab)^{2/3} = a^2 + b^2$$
 6

—x—



সম্মান্য মন্ত্র: সমিতি: সমাধী

UNIVERSITY OF NORTH BENGAL

B.Sc. Minor 1st Semester Examination, 2024

UMATMIN10001-MATHEMATICS

CLASSICAL AND LINEAR ALGEBRA

Time Allotted: 2 Hours 30 Minutes

Full Marks: 60

The figures in the margin indicate full marks.

GROUP-A / বিভাগ-ক / সমূহ-ক

1. Answer any *four* questions:

3×4 = 12

যে-কোন চারটি প্রশ্নের উত্তর দাও:

কোন চারটি প্রশ্নের উত্তর লেখ:

- (a) Apply Descartes' rule of sign to find the number of imaginary roots of $3x^5 - 4x^2 + 8 = 0$. 3

Descartes এর চিহ্ন নীতি প্রয়োগ করে $3x^5 - 4x^2 + 8 = 0$ -এর কাল্পনিক বীজের সংখ্যা নির্ণয় কর।ডেকার্টেসের নিয়ম প্রয়োগ করে সমীকরণ $3x^5 - 4x^2 + 8 = 0$ का काल्पनिक मूलहरूको संख्या निर्णय गर।

- (b) Find the values of p if 3

 p এর মান নির্ণয় কর যদি

$$\left(\cos \frac{\pi}{4} + i \sin \frac{\pi}{4} \right)^p = -1$$

যদি $\left(\cos \frac{\pi}{4} + i \sin \frac{\pi}{4} \right)^p = -1$ भए p को मान निर्णय गर।

- (c) Prove that the eigen values of a diagonal matrix are the diagonal elements of the matrix. 3

প্রমাণ কর একটি কর্ণ (diagonal) ম্যাট্রিক্সের eigen মানগুলি ম্যাট্রিক্সটির মুখ্য কর্ণ বরাবর উপাদানগুলি হয়।

বিকর্ণ মেট্রিক্সের eigen মানहरू त्यस মেट्रिक्सका विकर्ण तत्वहरू हुन् भनि प्रमाण गर।

- (d) State Cayley-Hamilton Theorem. Verify it for the matrix $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 3 \end{bmatrix}$. 3

Cayley-Hamilton উপপাদ্যটি বিবৃত কর। $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 3 \end{bmatrix}$ ম্যাট্রিক্সটির ক্ষেত্রে উপপাদ্যটি যাচাই কর।কাইলে-হেমিলটন উপপাদ্য লেখ। মেট্রিক্স $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 3 \end{bmatrix}$ मा काइले-हमिलटन उपपाद्य परीक्षण गर।

- (e) Find the rank of a matrix $\begin{bmatrix} 3 & 2 & -2 \\ 0 & 3 & -3 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$. 3

 $\begin{bmatrix} 3 & 2 & -2 \\ 0 & 3 & -3 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$ ম্যাট্রিক্সটির rank নির্ণয় কর।

মেট্রিক্স $\begin{bmatrix} 3 & 2 & -2 \\ 0 & 3 & -3 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$ কৌ rank নির্ণয় কর।

(f) If α, β, γ be the roots of the equation $x^3 + 5x^2 + 1 = 0$ find the value of $\sum \frac{1}{\alpha}$.

3

যদি α, β, γ ; $x^3 + 5x^2 + 1 = 0$ সমীকরণের বীজ হয় তাহলে $\sum \frac{1}{\alpha}$ -এর মান নির্ণয় কর।

যদি α, β, γ , সমীকরণ $x^3 + 5x^2 + 1 = 0$ কৌ মূলহলু ধ্য $\sum \frac{1}{\alpha}$ কৌ মান নির্ণয় কর।

GROUP-B / বিভাগ-খ / সমূহ-খ

2. Answer any **four** questions:

6×4 = 24

যে-কোন চারটি প্রশ্নের উত্তর দাও:

কুনৈ চার প্রশ্নহলুকৌ উত্তর লেখ:

(a) Solve by Cardan's method: $x^3 - 12x + 65 = 0$

6

Cardan পদ্ধতিতে সমাধান কর: $x^3 - 12x + 65 = 0$

$x^3 - 12x + 65 = 0$ লাই কার্ডানকৌ বিধিদ্বারা সমাধান কর।

(b) If a, b, c, d are four positive numbers, prove that

6

যদি a, b, c, d ; চারটি ধনাত্মক সংখ্যা হয় তবে প্রমাণ কর

যদি a, b, c, d চারবটা ধনাত্মক সংখ্যাহলু ধ্য, প্রমাণ কর:

$$(a+b+c+d)(a^3+b^3+c^3+d^3) \geq 16abcd$$

(c) If $x + \frac{1}{x} = 2 \cos \frac{\pi}{7}$, then show that $x^7 + \frac{1}{x^7} = -2$.

6

যদি $x + \frac{1}{x} = 2 \cos \frac{\pi}{7}$ হয় তবে দেখাও যে $x^7 + \frac{1}{x^7} = -2$ ।

যদি $x + \frac{1}{x} = 2 \cos \frac{\pi}{7}$ ধ্য, প্রমাণ কর: $x^7 + \frac{1}{x^7} = -2$ ।

(d) Check whether the following homogeneous system of equations have non-trivial solutions.

6

নিম্নলিখিত সমীকরণ সমূহের homogeneous সিস্টেমটির non-trivial সমাধান আছে কিনা যাচাই কর:

তল দিএকা সমঘাত সমীকরণ প্রণালীকৌ non-trivial সমাধান হুন্চ? যদি ধ্য খোজুনু হোস।

$$-7x + 2y - 3z = 0$$

$$x - 2y - 3z = 0$$

$$x + 2y + 5z = 0$$

Find them, if possible.

যদি সম্ভব হয় তাহলে সমাধানটি নির্ণয় কর।

(e) Find the rank of the matrix $\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 4 & 5 \\ 4 & 6 & 8 \end{bmatrix}$.

6

$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 4 & 5 \\ 4 & 6 & 8 \end{bmatrix}$ ম্যাট্রিক্সটির rank নির্ণয় কর।

मैट्रिक्स $\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 4 & 5 \\ 4 & 6 & 8 \end{bmatrix}$ का rank निर्णय गर।

(f) Find the inverse of the matrix $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 2 & 4 & 4 \\ 3 & 3 & 7 \end{bmatrix}$ by elementary row operations.

6

प्राथमिक सारि (elementary row) अपारेशननेर माध्यमे $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 2 & 4 & 4 \\ 3 & 3 & 7 \end{bmatrix}$ म्याट्रिक्सि विपरीत (inverse) टि निर्णय कर।

मैट्रिक्स $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 2 & 4 & 4 \\ 3 & 3 & 7 \end{bmatrix}$ का row operation द्वारा inverse निर्णय गर।

GROUP-C / विभाग-ग / समूह-ग

3. Answer any *two* questions:

12×2 = 24

ये-कोन दुई प्रश्नर उत्तर दाओ:

कुनै दुईवटा प्रश्नहरूको उत्तर लेख:

(a) (i) Find all the eigen values and eigen vectors of the matrix $A = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 1 \\ -1 & 2 & -1 \\ 1 & -1 & 2 \end{bmatrix}$.

$A = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 1 \\ -1 & 2 & -1 \\ 1 & -1 & 2 \end{bmatrix}$ म्याट्रिक्सि eigen मान एवं संग्रिष्ट eigen डेक्टरगुलि निर्णय कर।

मैट्रिक्स $A = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 1 \\ -1 & 2 & -1 \\ 1 & -1 & 2 \end{bmatrix}$ का सबै eigen मान र eigen भ्याक्टर निर्णय गर।

(ii) If $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$, then using Cayley-Hamilton Theorem, find A^9 and A^{-1} .

यदि $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$ हय तबे Cayley-Hamilton उपपाद्यि साहाय्ये A^9 एवं A^{-1} निर्णय कर।

यदि $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$ भए, काइले-हेमेलटन उपपाद्य प्रयोग गरेर A^9 र A^{-1} को मान निर्णय गर।

- (b) (i) Reduce the matrix $A = \begin{bmatrix} 2 & 3 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & -2 & -4 \\ 3 & 1 & 3 & -2 \\ 6 & 3 & 0 & -7 \end{bmatrix}$ to the normal form and find its rank. 6

$A = \begin{bmatrix} 2 & 3 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & -2 & -4 \\ 3 & 1 & 3 & -2 \\ 6 & 3 & 0 & -7 \end{bmatrix}$ ম্যাট্রিক্সটিকে normal রূপ (form)-এ রূপান্তরিত কর এবং ইহার rank নির্ণয় কর।

মেট্রিক্স $A = \begin{bmatrix} 2 & 3 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & -2 & -4 \\ 3 & 1 & 3 & -2 \\ 6 & 3 & 0 & -7 \end{bmatrix}$ লাই সামান্য রূপে পরিণত করে, তৎসকো rank নির্ণয় কর।

- (ii) Find the values of k for which the system of equations 6

$kx + y + z = 1$

$x + ky + z = 1$

$$kx + y + z = 1$$

$$x + ky + z = 1$$

$$x + y + kz = 1$$

will have (I) no solution, (II) unique solution and (III) more than one solution.

সমীকরণের সিস্টেমটির

(I) কোন সমাধান নেই। (II) একটি মাত্র সমাধান আছে। (III) একাধিক সমাধান আছে।

কো (I) সমাধান হুঁদেন (II) বিশিষ্ট সমাধান হুন্ট (III) এক ভন্দ ধের সমাধানহরু হুন্ট।

- (c) (i) Solve by Ferrari's method: $x^4 + 12x - 5 = 0$ 6

Ferrari পদ্ধতিতে সমাধান কর: $x^4 + 12x - 5 = 0$

$x^4 + 12x - 5 = 0$ লাই ফেরারিস বিধি দ্বারা সমাধান কর।

- (ii) Find the condition that the cubic equation $x^3 - px^2 + qx - r = 0$ should have its roots in GP. 6

এমন একটি শর্ত নির্ণয় কর যাতে $x^3 - px^2 + qx - r = 0$ ঘন সমীকরণটির বীজগুলি GP তে থাকে।

ঘন সমীকরণ $x^3 - px^2 + qx - r = 0$ কা মূলহরু (GP) জ্যামিতীয় প্রগতিমা হুনে স্থিতি নির্ণয় কর।

- (d) (i) Prove that: 6

প্রমাণ কর:

প্রমাণ কর:

$$\sin\left(i \log \frac{a-ib}{a+ib}\right) = \frac{2ab}{a^2+b^2}$$

- (ii) Use De Moivre's theorem to find all the fourth roots of unity. 6

De Moivre-এর উপপাদ্যটির সাহায্যে একের চতুর্থ মূল (fourth roots of unity) গুলি নির্ণয় কর।

ডি মেইবর উপপাদ্য প্রয়োগ করে একাককো (unity) চৌঘো মূলহরু (fourth root) নির্ণয় কর।

—x—



সম্মান্য মন্ত্র: সমিতি: সমাধী

UNIVERSITY OF NORTH BENGAL

B.Sc. Minor/Dsc 1st Semester Examination, 2024

MATHMIN101/MATHDSC101-MATHEMATICS

CLASSICAL ALGEBRA AND MATRIX THEORY

Time Allotted: 2 Hours 30 Minutes

Full Marks: 60

The figures in the margin indicate full marks.

GROUP-A / বিভাগ-ক / বিভাগ-ক

1. Answer any *four* questions:

3×4 = 12

যে-কোন চারটি প্রশ্নের উত্তর দাও:

কোন চার প্রশ্নের উত্তর দেও:

(a) Find the remainder when $2x^4 - 6x^3 + 7x^2 - 5x + 1$ is divided by $(2x - 3)$.

3

 $2x^4 - 6x^3 + 7x^2 - 5x + 1$ -কে $(2x - 3)$ দিয়ে ভাগ করলে যে ভাগশেষ হয় তা নির্ণয় কর। $2x^4 - 6x^3 + 7x^2 - 5x + 1$ লাই $(2x - 3)$ লে ভাগ গর্দা শেষ পত্তা লগাউ।

(b) Find the rank of the matrix

3

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 4 \\ 3 & 4 & 5 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 4 \\ 3 & 4 & 5 \end{pmatrix} \text{ ম্যাট্রিক্সটির rank নির্ণয় কর।}$$

$$\text{আব্বুহ } \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 4 \\ 3 & 4 & 5 \end{pmatrix} \text{ কৌ rank পত্তা লগাউ।}$$

(c) Show that the equations $x + y + z = 9$ and $3x - 2y + 4z = 3$ are consistent.

3

দেখাও যে $x + y + z = 9$ এবং $3x - 2y + 4z = 3$ সমীকরণদ্বয় সামঞ্জস্যপূর্ণ (consistent).সমীকরণহরু $x + y + z = 9$ অনি $3x - 2y + 4z = 3$ সঙ্গতি চন্ ধনী দেখাউ।(d) Solve the equation $x^4 + x^2 - 2x + 6 = 0$, it is given that $(1 + i)$ is a root.

3

 $x^4 + x^2 - 2x + 6 = 0$ সমীকরণটিকে সমাধান কর, যেখানে প্রদত্ত আছে $(1 + i)$ ইহার একটি বীজ।সমীকরণ $x^4 + x^2 - 2x + 6 = 0$ কৌ দিইকৌ এক মূল $(1 + i)$ ধএ যসলাই সমাধান গর।(e) Verify Cayley-Hamilton theorem for the matrix $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 2 & 3 & -1 \end{pmatrix}$.

3

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 2 & 3 & -1 \end{pmatrix} \text{ ম্যাট্রিক্সটির ক্ষেত্রে Cayley-Hamilton উপপাদ্যটি যাচাই কর।}$$

$$\text{আব্বুহ } \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 2 & 3 & -1 \end{pmatrix} \text{ কৌ লাগি Cayley-Hamilton প্রমেয় প্রমাণিত গর।}$$

(f) If a, b, x are real and $\text{mod}(a+ib)=1$ prove that $(a+ib)^{ix}$ is purely real.

3

যদি a, b, x সকলে বাস্তব এবং $\text{mod}(a+ib)=1$ হয় তবে প্রমাণ কর $(a+ib)^{ix}$ একটি সম্পূর্ণ বাস্তব (purely real).

যদি a, b, x বাস্তবিক অনি $\text{mod}(a+ib)=1$ হ'লে $(a+ib)^{ix}$ বিশুদ্ধ বাস্তবিক (purely real) হ'ল প্রমাণ কর।

GROUP-B / বিভাগ-খ / বিভাগ-খ

2. Answer any *four* questions:

6×4 = 24

যে-কোন চারটি প্রশ্নের উত্তর দাও:

কোন চার প্রশ্নের উত্তর দেও:

(a) If $\log \sin(\theta + i\phi) = \alpha + i\beta$ then prove that $2\cos 2\theta = e^{2\phi} + e^{-2\phi} - 4e^{2\alpha}$ and $\cos(\theta - \beta) = e^{2\phi} \cos(\theta + \beta)$.

6

যদি $\log \sin(\theta + i\phi) = \alpha + i\beta$ হয় তবে প্রমাণ কর $2\cos 2\theta = e^{2\phi} + e^{-2\phi} - 4e^{2\alpha}$ এবং $\cos(\theta - \beta) = e^{2\phi} \cos(\theta + \beta)$.

যদি $\log \sin(\theta + i\phi) = \alpha + i\beta$ হ'লে প্রমাণ কর $2\cos 2\theta = e^{2\phi} + e^{-2\phi} - 4e^{2\alpha}$ অনি $\cos(\theta - \beta) = e^{2\phi} \cos(\theta + \beta)$.

(b) If x, y, z are positive real numbers and $x + y + z = 1$, prove that

6

যদি x, y, z সকলেই ধনাত্মক বাস্তব সংখ্যা এবং $x + y + z = 1$ হয় তবে প্রমাণ কর

যদি x, y, z ধনাত্মক বাস্তবিক সংখ্যা হ'লে অনি $x + y + z = 1$ হ'লে প্রমাণ কর

$$8xyz \leq (1-x)(1-y)(1-z) \leq \frac{8}{27}$$

(c) Find the range of values of k for which the equation $x^4 - 26x^2 + 48x - k = 0$ has four unequal roots.

6

k -এর মানের বিস্তার নির্ণয় কর যার জন্য $x^4 - 26x^2 + 48x - k = 0$ সমীকরণটির চারটি বীজই অসমান।

সমীকরণ $x^4 - 26x^2 + 48x - k = 0$ কো চারটি অসমান মূল হ'লে k কো মান হ'লে দায়রা পতা লাগে।

(d) Obtain the fully reduced normal form of the matrix

6

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 2 & 1 \\ 1 & 3 & 1 & 0 & 3 \\ 2 & 6 & 4 & 2 & 8 \\ 3 & 9 & 4 & 2 & 10 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 2 & 1 \\ 1 & 3 & 1 & 0 & 3 \\ 2 & 6 & 4 & 2 & 8 \\ 3 & 9 & 4 & 2 & 10 \end{bmatrix}$$

ম্যাট্রিক্সটির সম্পূর্ণ হ্রাস স্বাভাবিক রূপটি (fully reduced normal form) নির্ণয় কর।

$$\text{আবৃত্তি} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 2 & 1 \\ 1 & 3 & 1 & 0 & 3 \\ 2 & 6 & 4 & 2 & 8 \\ 3 & 9 & 4 & 2 & 10 \end{bmatrix}$$

কো পূর্ণ রূপমা ঘটা হ'লে সামান্য রূপ (fully reduced normal form) প্রাপ্ত

হ'ল।

(e) Solve by Cardon's method $x^3 - 12x + 65 = 0$.

6

$x^3 - 12x + 65 = 0$ সমীকরণটিকে Cardon পদ্ধতিতে সমাধান কর।

Cardon কো পদ্ধতিদ্বারা সমাধান কর: $x^3 - 12x + 65 = 0$

- (f) Find the inverse of the matrix $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 3 & 2 & 3 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$ by using elementary row operations. 6

প্রাথমিক সারি অপারেশন (elementary row operation)-এর সাহায্যে $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 3 & 2 & 3 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$ ম্যাট্রিক্সটির

বিপরীত (inverse) ম্যাট্রিক্সটি নির্ণয় কর।

প্রাথমিক পঙ্ক্তি সন্মালনকো সহায়তালে $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 3 & 2 & 3 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$ কো inverse পতা लगाऊ।

GROUP-C / বিভাগ-গ / বিভাগ-গ

Answer any two questions

12×2 = 24

যে-কোন দুটি প্রশ্নের উত্তর দাও

কোন দুই প্রশ্নের উত্তর দেও

3. (a) Solve the equation $x^4 + 3x^3 + x^2 - 2 = 0$ by Ferrari's method. 6

Ferrari পদ্ধতিতে $x^4 + 3x^3 + x^2 - 2 = 0$ সমীকরণটিকে সমাধান কর।

Ferrari কো বিধি লে সমীকরণ $x^4 + 3x^3 + x^2 - 2 = 0$ লাই সমাধান কর।

- (b) If $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$ are n -distinct roots of the equation $x^n - 1 = 0$, then prove that 6

$$(a + b\alpha_1)(a + b\alpha_2) \dots (a + b\alpha_n) = a^n + (-1)^{n-1}b^n$$

যদি $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$; $x^n - 1 = 0$ সমীকরণটির n সংখ্যক স্বতন্ত্র বীজ হয় তাহলে প্রমাণ কর

$$(a + b\alpha_1)(a + b\alpha_2) \dots (a + b\alpha_n) = a^n + (-1)^{n-1}b^n$$

যদি $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$ সমীকরণ $x^n - 1 = 0$ কো n -অন্য মূলহরু হও, প্রমাণ কর

$$(a + b\alpha_1)(a + b\alpha_2) \dots (a + b\alpha_n) = a^n + (-1)^{n-1}b^n$$

4. (a) Determine the conditions of a and b for which the system 6

$$x + y + z = 1$$

$$x + 2y - z = b$$

$$5x + 7y + az = b^2$$

admits of (i) only one solution.

(ii) no solution.

(iii) many solutions.

$$x + y + z = 1$$

$$x + 2y - z = b$$

$$5x + 7y + az = b^2$$

সিস্টেমটির (i) শুধুমাত্র একটি সমাধান আছে

(ii) কোন সমাধান নেই

(iii) একাধিক সমাধান আছে।

এমন a এবং b -এর মানগুলি নির্ণয় কর।

a এবং b কো সর্বতরু নির্ধারণ কর জসকো লাগি সমীকরণ সমূহ

$$x + y + z = 1$$

$$x + 2y - z = b$$

$$5x + 7y + az = b^2$$

- को (i) एकमात्र समाधान हुन्छ
(ii) समाधान नै हुँदैन
(iii) एकभन्दा बढी समाधान हुन्छ।

(b) If $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$

4+2

then show that for every integer $n (\geq 3)$, $A^n = A^{n-2} + A^2 - I$. Hence evaluate A^{50} .

यदि $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ হয় তবে প্রত্যেকটি পূর্ণসংখ্যা $n (\geq 3)$ -এর জন্য প্রমাণ কর

$A^n = A^{n-2} + A^2 - I$. উক্ত হইতে A^{50} -এর মান নির্ণয় কর।

যদি $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ भए देखाउ कि सबै पूर्ण सङ्ख्या $n (\geq 3)$ को लागि

$A^n = A^{n-2} + A^2 - I$ हुन्छ। A^{50} मूल्याङ्कन गर।

5. (a) If $x = \log \tan \left(\frac{\pi}{4} + \frac{\theta}{2} \right)$ where θ is real, prove that $\theta = -i \log \tan \left(\frac{\pi}{4} + i \frac{x}{2} \right)$.

6

যদি $x = \log \tan \left(\frac{\pi}{4} + \frac{\theta}{2} \right)$, যেখানে θ একটি বাস্তব, তাহলে প্রমাণ কর $\theta = -i \log \tan \left(\frac{\pi}{4} + i \frac{x}{2} \right)$.

যদি $x = \log \tan \left(\frac{\pi}{4} + \frac{\theta}{2} \right)$ भए, जहाँ θ वास्तविक हुन्, प्रमाण गर $\theta = -i \log \tan \left(\frac{\pi}{4} + i \frac{x}{2} \right)$

(b) If $a, b, c, d > 0$ and $a+b+c+d=1$, prove that

6

যদি $a, b, c, d > 0$ এবং $a+b+c+d=1$ হয় তবে প্রমাণ কর

যদি $a, b, c, d > 0$ अनि $a+b+c+d=1$ भए प्रमाण गर

$$\frac{a}{1+b+c+d} + \frac{b}{1+a+c+d} + \frac{c}{1+a+b+d} + \frac{d}{1+a+b+c} \geq \frac{4}{7}$$

6. (a) Solve the equation $x^4 - 4x^3 - 4x^2 - 4x - 5 = 0$ given that two roots α, β are connected by the relation $2\alpha + \beta = 3$.

6

$x^4 - 4x^3 - 4x^2 - 4x - 5 = 0$ সমীকরণটি সমাধান কর যেখানে প্রদত্ত আছে দুটি বীজ α এবং β ; $2\alpha + \beta = 3$ সম্পর্ক দ্বারা সংযুক্ত।

দুইবটা মূলহরু α, β সম্বন্ধ $2\alpha + \beta = 3$ দ্বারা জোড়िएको সমীকরণ $x^4 - 4x^3 - 4x^2 - 4x - 5 = 0$ लाई समाधान गर।

(b) Find the eigen values and the corresponding eigen vectors of the following real matrix:

6

নিম্নলিখিত বাস্তব ম্যাট্রিক্সটির eigen মান এবং সংশ্লিষ্ট eigen ভেক্টরগুলি নির্ণয় কর:

$$\begin{pmatrix} 2 & 2 & 1 \\ 1 & 3 & 1 \\ 1 & 2 & 2 \end{pmatrix}$$

আব্যুহ $\begin{pmatrix} 2 & 2 & 1 \\ 1 & 3 & 1 \\ 1 & 2 & 2 \end{pmatrix}$ को eigen मानहरू र अनि सम्बन्धित eigen सदिशहरू पत्ता लगाउ।

—x—