

2018

MATHEMATICS (General)**FIRST PAPER**

(New Syllabus)

Time : 2 hours

Full Marks : 50

The figures in the margin indicate full marks.

GROUP—AAnswer Question No. 1 and any **two** from the rest.

1. (a) If $(x-a)^2$ is a factor of $x^3 + 3px + q$, then
show that $q^2 + 4p^3 = 0$. 2
- (b) Find the principal value of $(1+i)^{\frac{1}{5}}$. 1
- (c) Prove without expanding that

$$\begin{vmatrix} 0 & -a & -b \\ a & 0 & c \\ b & -c & 0 \end{vmatrix} = 0$$

2

2. (a) If

$$\sinh^{-1}(x+iy) + \sinh^{-1}(x-iy) = \cosh^{-1}(a)$$

where a is a constant greater than 1,
then prove that (x, y) lies on an ellipse. 5

- (b) Apply Descartes' rule of signs to find the nature of roots of the equation

$$x^4 + 2x^2 + 3x - 1 = 0$$

5

3. (a) Prove without expanding that

$$\begin{vmatrix} (b+c)^2 & c^2 & b^2 \\ c^2 & (c+a)^2 & a^2 \\ b^2 & a^2 & (a+b)^2 \end{vmatrix} = 2(bc+ca+ab)^3$$

5

- (b) Find the matrix A , if

$$\text{adj } A = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 0 \\ 2 & 5 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

and $\det A = 2$.

5

4. (a) If α, β, γ be the roots of the equation

$$x^3 + px^2 + qx + r = 0$$

then find the equation whose roots are

$$\frac{\alpha}{\beta + \gamma}, \frac{\beta}{\alpha + \gamma}, \frac{\gamma}{\alpha + \beta}$$

5

- (b) Solve the following system of linear equations :

$$x + y + z = 6$$

$$x + 2y + 3z = 14$$

$$x - y + z = 2$$

5

GROUP—B

Answer Question No. 5 and any two from the rest.

5. (a) Show that if every element of a group $(G, *)$ be its own inverse, then it is an Abelian group. 2

- (b) Define basis of a vector space. 1

- (c) Let $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ be defined by

$$f(x) = 3x + 1 \quad \forall x \in \mathbb{R}$$

Examine if f is—

(i) injective;

(ii) surjective. 2

6. (a) Let $S = \{1, \omega, \omega^2\}$, where $\omega^3 = 1$. Prove that S is an Abelian group. 3

- (b) Prove that the set

$$S = \{(2, 1, 1), (1, 2, 1), (1, 1, 2)\}$$

is a linearly independent subset of $\mathbb{R}^3$. 3

- (c) Let

$$A = \{x \in \mathbb{Z}, 0 \leq x \leq 10\}$$

$$B = \{x \in \mathbb{Z}, 5 \leq x \leq 15\}$$

$$C = \{x \in \mathbb{Z}, x \geq 5\}$$

$$D = \{x \in \mathbb{Z}, x \leq 15\}$$

Find the following :

(i) $A \cap B$

(ii) $B - C$

(iii) $A - D$

(iv) $A \cup B$

7. (a) Prove that the characteristic of an integral domain is either zero or prime.

(b) If R be a ring in which $x^2 = x$ for all x , then prove that

$$(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2 \quad \forall a, b \in R$$

(c) Check whether the set

$$S = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3; x^2 + y^2 = z^2\}$$

is a subspace of $\mathbb{R}^3$ or not.

8. (a) Examine whether the quadratic form

$$5x_1^2 + x_2^2 + 14x_3^2 - 4x_2x_3 - 10x_1x_3$$

is positive definite or not.

(b) Show that the set of matrices of the form

$$\begin{bmatrix} a & b \\ 2b & a \end{bmatrix}$$

with rational a, b forms a field under usual addition and multiplication of matrices.

বিভাগ—ক

১ নং প্রশ্ন এবং অন্য যে কোনো দুটি প্রশ্নের উত্তর দাও।

১। (ক) $x^3 + 3px + q$ -এর একটি উৎপাদক $(x-a)^2$ হলে দেখাও যে $q^2 + 4p^3 = 0$.

(খ) $(1+i)^{\frac{1}{2}}$ -এর মুখ্যমান নির্ণয় কর।

(গ) বিস্তার না করে প্রমাণ কর যে

$$\begin{vmatrix} 0 & -a & -b \\ a & 0 & c \\ b & -c & 0 \end{vmatrix} = 0$$

২। (ক) যদি

$$\sinh^{-1}(x+iy) + \sinh^{-1}(x-iy) = \cosh^{-1}(a)$$

হয়, যেখানে $a(>1)$ একটি ধ্রুবক, প্রমাণ কর যে (x, y) একটি উপবৃত্তে অবস্থিত।

(খ) দেকাতের চিহ্ন-সংক্রান্ত নিয়ম প্রয়োগ করে

$$x^4 + 2x^2 + 3x - 1 = 0$$

সমীকরণের বীজসমূহের প্রকৃতি নির্ণয় কর।

৩। (ক) বিস্তার না করে প্রমাণ কর যে

$$\begin{vmatrix} (b+c)^2 & c^2 & b^2 \\ c^2 & (c+a)^2 & a^2 \\ b^2 & a^2 & (a+b)^2 \end{vmatrix} = 2(bc+ca+ab)^3$$

(খ) $\text{adj } A = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 0 \\ 2 & 5 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ এবং $\det A = 2$ হলে, A

ম্যাট্রিক্সটি নির্ণয় কর।

৪। (ক) $x^3 + px^2 + qx + r = 0$ সমীকরণের বীজ তিনটি α, β, γ হলে

$$\frac{\alpha}{\beta + \gamma}, \frac{\beta}{\alpha + \gamma}, \frac{\gamma}{\alpha + \beta}$$

বীজ সম্মিলিত সমীকরণটি নির্ণয় কর।

(খ) নিম্নলিখিত রৈখিক সমীকরণের সিস্টেমটি সমাধান কর :

$$x + y + z = 6$$

$$x + 2y + 3z = 14$$

$$x - y + z = 2$$

বিভাগ—খ

৫ নং প্রশ্ন এবং অন্য যে কোনো দুটি প্রশ্নের উত্তর দাও।

৫। (ক) কোন group $(G, *)$ -এর প্রত্যেকটি element যদি নিজের inverse হয়, তবে প্রমাণ কর $(G, *)$ একটি Abelian group.

(খ) কোন vector space-এর basis-এর সংজ্ঞা দাও।

(গ) একটি অপেক্ষক $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ -এর সংজ্ঞা নিম্নরূপ :

$$f(x) = 3x + 1 \quad \forall x \in \mathbb{R}$$

নিম্নলিখিত statement দুটির যথার্থতা পরীক্ষা কর :

(i) f হয় injective

(ii) f হয় surjective

৬। (ক) ধরা যাক $S = \{1, \omega, \omega^2\}$, যেখানে $\omega^3 = 1$. প্রমাণ কর যে S একটি Abelian group.

(খ) প্রমাণ কর যে

$$S = \{(2, 1, 1), (1, 2, 1), (1, 1, 2)\}$$

সেটি $\mathbb{R}^3$ -এর একটি linearly independent উপসেট।

(গ) মনে কর

$$A = \{x \in \mathbb{Z}, 0 \leq x \leq 10\}$$

$$B = \{x \in \mathbb{Z}, 5 \leq x \leq 15\}$$

$$C = \{x \in \mathbb{Z}, x \geq 5\}$$

$$D = \{x \in \mathbb{Z}, x \leq 15\}$$

নিম্নলিখিতগুলির মান নির্ণয় কর :

$$(i) A \cap B$$

$$(ii) B - C$$

$$(iii) A - D$$

$$(iv) A \cup B$$

৭। (ক) প্রমাণ কর যে কোন integral domain-এর characteristic হয় 0 অথবা মৌলিক।

(খ) কোন Ring R -এর সকল x -এর জন্য $x^2 = x$ হলে দেখাও যে

$$(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2 \quad \forall a, b \in R$$

(গ) নিম্নের statement-এর যথার্থতা পরীক্ষা কর :

$$S = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3; x^2 + y^2 = z^2\}$$

$\mathbb{R}^3$ -র একটি subspace অথবা subspace নয়।

৮। (ক) $5x_1^2 + x_2^2 + 14x_3^2 - 4x_2x_3 - 10x_1x_3$ দ্বিঘাত রূপটি (quadratic form) positive definite কিনা, পরীক্ষা কর।

(খ) দেখাও যে

$$\begin{bmatrix} a & b \\ 2b & a \end{bmatrix}$$

আকারের সকল ম্যাট্রিক্স যেখানে a, b মূলদ, ম্যাট্রিক্সের স্বাভাবিক যোগ ও গুণের সাপেক্ষে একটি field তৈরী করে।

[NEPALI VERSION]

সমূহ—ক

প্রশ্ন নং ১ অনি রহলবার কুনৈ দুইবটা প্রশ্নকা উত্তর দেऊ।

১. (ক) $(x-a)^2$ যদি $x^3 + 3px + q$ কো গুণনখণ্ড (factor) भए प्रमाण गर $q^2 + 4p^3 = 0$. २

(ख) $(1+i)^{\frac{1}{2}}$ को प्रमुख (principal) मान निर्णय गर। १

(ग) प्रमाण गर (expand नगर) :

$$\begin{vmatrix} 0 & -a & -b \\ a & 0 & c \\ b & -c & 0 \end{vmatrix} = 0$$

२. (क) यदि

$$\sinh^{-1}(x + iy) + \sinh^{-1}(x - iy) = \cosh^{-1}(a)$$

भए, जहाँ $a > 1$ एउटा स्थिराङ्क हो, (x, y) एउटा अण्ड-वृत्तमा पर्छ भनी प्रमाण गर। ५

(ख) Descartes-को चिह्न नियम प्रयोग गरि, समीकरण

$$x^4 + 2x^2 + 3x - 1 = 0$$

को मूलहरूको प्रकृति निर्णय गर। ५

३. (क) प्रमाण गर (expand नगर) :

$$\begin{vmatrix} (b+c)^2 & c^2 & b^2 \\ c^2 & (c+a)^2 & a^2 \\ b^2 & a^2 & (a+b)^2 \end{vmatrix} = 2(bc+ca+ab)^3$$

(ख) यदि $\text{adj } A = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 0 \\ 2 & 5 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ भए अनि $\det A = 2$ भए मैट्रिक्स A निर्णय गर।

४. (क) α, β, γ यदि समीकरण $x^3 + px^2 + qx + r = 0$ को मूलहरू भए त्यो समीकरण निर्णय गर जसको मूलहरू

$$\frac{\alpha}{\beta + \gamma}, \frac{\beta}{\alpha + \gamma}, \frac{\gamma}{\alpha + \beta}$$

हुन्।

(ख) रेखिक समीकरणहरूको समाधान गर :

$$x + y + z = 6$$

$$x + 2y + 3z = 14$$

$$x - y + z = 2$$

समूह—ख

प्रश्न नं० ५ अनि रहलबाट कुनै दुईवटा प्रश्नका उत्तर देऊ।

५. (क) समूह $(G, *)$ को यदि हरेक तत्व (element) स्वयंको inverse भए त्यो समूह Abelian हुन्छ भनी प्रमाण गर।

(ख) सदिशमण्डलको आधारको परिभाषा देऊ।

(ग) यदि $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ को परिभाषा

$$f(x) = 3x + 1 \quad \forall x \in \mathbb{R}$$

भए जाँच गर—

(i) f injective हुन्छ;

(ii) f surjective हुन्छ।

६. (क) $S = \{1, \omega, \omega^2\}$ भए अनि $\omega^3 = 1$ भए S एउटा Abelian समूह हुन्छ भनी प्रमाण गर।

(ख) सेट $S = \{(2, 1, 1), (1, 2, 1), (1, 1, 2)\}$, $\mathbb{R}^3$ को रेखिक रूपले स्वतन्त्र उपसेट हो भनी प्रमाण गर।

(ग) यदि

$$A = \{x \in \mathbb{Z}, 0 \leq x \leq 10\}$$

$$B = \{x \in \mathbb{Z}, 5 \leq x \leq 15\}$$

$$C = \{x \in \mathbb{Z}, x \geq 5\}$$

$$D = \{x \in \mathbb{Z}, x \leq 15\}$$

भए तलहरूको मान निर्णय गर :

(i) $A \cap B$

(ii) $B - C$

(iii) $A - D$

(iv) $A \cup B$

७. (क) एउटा integral domain-को characteristic शून्य वा मौलिक संख्या हुन्छ भनी प्रमाण गर।

(ख) रिङ R मा यदि $x^2 = x \quad \forall x$ भए प्रमाण गर :

$$(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2 \quad \forall a, b \in R$$

(ग) सेट $S = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3; x^2 + y^2 = z^2\}$, $\mathbb{R}^3$ को उपसदिशमण्डल हुन्छ कि हुँदैन, जाँच गर।

८. (क) Quadratic form

$$5x_1^2 + x_2^2 + 14x_3^2 - 4x_2x_3 - 10x_1x_3$$

positive definite हो कि होइन, जाँच गर।

(ख) मैट्रिक्सहरूको योगफल अनि गुणनफलसँग सेट

$$\left\{ \begin{bmatrix} a & b \\ 2b & a \end{bmatrix} \mid a, b \in Q \right\}$$

ले एउटा फिल्ड बनाउँछ भनी प्रमाण गर।

★★★

For Library Use

B I (Three Year G)
Under 1+1+1 System

2018

MATHEMATICS (General)

SECOND PAPER

(New Syllabus)

Time : 2 hours

Full Marks : 50

The figures in the margin indicate full marks.

GROUP—A

Answer Question No. 1 and any three from the rest.

1. Answer any **four** questions : $2 \times 4 = 8$

(a) Determine the nature of the conic

$$r = \frac{1}{4 - 5 \cos \theta}$$

and find the length of the latus rectum.

(b) Find the value of a for which the equation

$$ax^2 + xy - 12y^2 + 2x - 31y - 20 = 0$$

represents a pair of straight lines.

(c) What does the equation

$$4x^2 + 2\sqrt{3}xy + 2y^2 = 1$$

become when the axes are rotated through an angle 30° ?

(2)

- (d) Find the pole of the straight line $x + y + 3 = 0$ with respect to the circle $x^2 + y^2 - 2x + 5 = 0$.
- (e) Show that the planes $2x + 3y - z = 0$, $3x + 3y + z = 2$, $x - y + 2z = 5$ intersect at a point.
- (f) The plane $x + 2y + 3z = 6$ meets the co-ordinate axes at A, B, C. Find the equation of the sphere OABC, O being the origin.

2. (a) If the equation

$$ax^2 + 2hxy + by^2 + 2gx + 2fy + c = 0$$

represents two intersecting straight lines, show that the square of the distance of the point of intersection of the straight lines from the origin is

$$\frac{c(a+b) - f^2 - g^2}{ab - h^2}$$

(b) Suppose the expression

$$ax^2 + 2hxy + by^2$$

changes into $AX^2 + 2HXY + BY^2$ by a rotation of the rectangular axes system (x, y) about origin to the system (X, Y) . Prove that $a + b = A + B$ and $ab - h^2 = AB - H^2$.

8MRD/329

(Continued)

(3)

3. (a) Reduce the following equation of second degree to its canonical form and determine the nature of the conic

$$x^2 - 2xy + y^2 + 6x - 4y - 3 = 0$$

- (b) Show that the locus of the poles of the chords of the hyperbola

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$$

which subtend a right angle at the centre is

$$\frac{x^2}{a^4} + \frac{y^2}{b^4} = \frac{1}{a^2} - \frac{1}{b^2}$$

4. (a) If $2c$ is the s.d. between the lines

$$\frac{x}{l} + \frac{z}{n} = 1, y = 0; \quad \frac{y}{m} + \frac{z}{n} = 1, x = 0$$

then show that $\frac{1}{c^2} = \frac{1}{l^2} + \frac{1}{m^2} + \frac{1}{n^2}$.

- (b) Show that the polar equation of a conic referred to a focus as pole may be taken

$$\text{as } \frac{l}{r} = 1 + e \cos \theta.$$

5. (a) Show that the straight line $r \cos(\theta - \alpha) = p$ touches the conic

$$\frac{l}{r} = 1 + e \cos \theta \text{ if}$$

$$(l \cos \alpha - ep)^2 + l^2 \sin^2 \alpha = p^2$$

(Turn Over)

8MRD/329

- (b) A variable plane passes through the point (α, β, γ) and meets the axes at A, B and C . Show that the locus of the point of intersection of the planes through A, B, C and parallel to the axes is
- $$\alpha x^{-1} + \beta y^{-1} + \gamma z^{-1} = 1$$

6. (a) Deduce the polar equation of the chord of the conic $\frac{l}{r} = 1 - e \cos \theta$ with $(\alpha - \beta)$ and $(\alpha + \beta)$ as vectorial angles of its extremities.

- (b) A sphere of constant radius r passes through the origin O and cuts the axes at A, B and C respectively. Prove that the locus of the foot of the perpendicular from O to the plane ABC is given by

$$(x^2 + y^2 + z^2)^2 (x^{-2} + y^{-2} + z^{-2}) = 4r^2$$

GROUP—B

7. Answer **all** questions :

- (a) Determine λ for which the vector $\lambda(3\hat{i} - 2\hat{j} + \hat{k})$ may be of unit length.

- (b) Find the vector equation of a straight line passing through the points $(\hat{i} + \hat{j} + \hat{k})$ and $(3\hat{i} + 2\hat{j} - \hat{k})$.

8. Answer any **two** questions : 3×2=6

- (a) If $\vec{a} \times \vec{b} = \vec{c}$, $\vec{b} \times \vec{c} = \vec{a}$ and $\vec{c} \times \vec{a} = \vec{b}$, show that the vectors $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ are mutually perpendicular.

- (b) Prove, by vector method, that

$$\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C}$$

for any triangle ABC .

- (c) Show that the vectors $\vec{a} = (1, -2, 3)$, $\vec{b} = (-2, 3, -4)$ and $\vec{c} = (0, -1, 2)$ are coplanar.

9. Answer any **one** question :

- (a) (i) Show that

$$[\vec{\alpha} + \vec{\beta} \quad \vec{\beta} + \vec{\gamma} \quad \vec{\gamma} + \vec{\alpha}] = 2[\vec{\alpha} \quad \vec{\beta} \quad \vec{\gamma}]$$

- (ii) A particle acted on by constant forces $4\hat{i} + \hat{j} - 3\hat{k}$ and $3\hat{i} + \hat{j} - \hat{k}$ is displaced from the point $\hat{i} + 2\hat{j} + 3\hat{k}$ to the point $5\hat{i} + 4\hat{j} + \hat{k}$. Find the amount of work done.

- (b) Find the vector equation of the plane passing through the origin and parallel to the vectors $\hat{i} + 2\hat{j} + 3\hat{k}$ and $2\hat{i} - \hat{j} - \hat{k}$.

বিভাগ-ক

১ নং প্রশ্ন এবং আরও যে-কোন তিনটি প্রশ্নের উত্তর দাও।

১। যে-কোন চারটি প্রশ্নের উত্তর দাও :

(ক) $r = \frac{1}{4-5\cos\theta}$ শঙ্কুচ্ছেদটির প্রকৃতি ও নাভিস্থের দৈর্ঘ্য নির্ণয় কর।

(খ) α -এর কোন্ মানের জন্য

$$ax^2 + xy - 12y^2 + 2x - 31y - 20 = 0$$

সমীকরণটি যুগ্ম সরলরেখা নির্দেশ করে, তা নির্ণয় কর।

(গ) অক্ষদ্বয়ের 30° কোণে ঘূর্ণনের ফলে

$$4x^2 + 2\sqrt{3}xy + 2y^2 = 1$$

সমীকরণটির রূপান্তরিত রূপ নির্ণয় কর।

(ঘ) $x^2 + y^2 - 2x + 5 = 0$ বৃত্তের সাপেক্ষে

$x + y + 3 = 0$ সরলরেখাটির মেরু (pole) নির্ণয় কর।

(ঙ) দেখাও যে, $2x + 3y - z = 0$, $3x + 3y + z = 2$, $x - y + 2z = 5$ সমতলগুলি একটি বিন্দুতে ছেদ করে।

(চ) $x + 2y + 3z = 6$ সমতলটি অক্ষত্রয়কে A , B ও C বিন্দুতে ছেদ করলে, $OABC$ গোলকটির সমীকরণ নির্ণয় কর, যেখানে O হল মূলবিন্দু।

২। (ক) যদি $ax^2 + 2hxy + by^2 + 2gx + 2fy + c = 0$ সমীকরণটি দুটি পরস্পরছেদী সরলরেখা বোঝায়, তাহলে দেখাও যে, মূলবিন্দু থেকে সরলরেখাদ্বয়ের ছেদবিন্দুর দূরত্বের বর্গের মান

$$\frac{c(a+b) - f^2 - g^2}{ab - h^2}$$

(খ) মূল বিন্দুর সাপেক্ষে আয়তাকার অক্ষ প্রণালী (x, y) -কে ঘূর্ণনের দ্বারা (X, Y) অক্ষ প্রণালীতে রূপান্তরিত করার ফলে $ax^2 + 2hxy + by^2$ রাশিমালাটি $AX^2 + 2HXY + BY^2$ রাশিমালাতে পরিবর্তিত হয়। প্রমাণ কর যে, $a + b = A + B$ এবং $ab - h^2 = AB - H^2$.

৩। (ক) $x^2 - 2xy + y^2 + 6x - 4y - 3 = 0$ সমীকরণটিকে আদর্শ আকারে প্রকাশ করে শঙ্কুচ্ছেদটির প্রকৃতি নির্ণয় কর।

(খ) দেখাও যে, $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$ পরাবৃত্তটির যে সকল জ্যা কেন্দ্রবিন্দুতে সমকোণ উৎপন্ন করে, তাদের মেরুগুলির (poles) সম্ভারপথ হল

$$\frac{x^2}{a^4} + \frac{y^2}{b^4} = \frac{1}{a^2} - \frac{1}{b^2}$$

৪। (ক) যদি $2C, \frac{x}{l} + \frac{z}{n} = 1, y = 0; \frac{y}{m} + \frac{z}{n} = 1, x = 0$

সরলরেখাখন্ডের নূনতম দূরত্ব হয়, তাহলে দেখাও যে

$$\frac{1}{c^2} = \frac{1}{l^2} + \frac{1}{m^2} + \frac{1}{n^2}$$

(খ) দেখাও যে, একটি শঙ্কুচ্ছেদের মেরু সমীকরণ, নাভিবিন্দুকে মেরুবিন্দু ধরে, $\frac{l}{r} = 1 + e \cos \theta$ আকারে প্রকাশ করা যায়।

৫। (ক) দেখাও যে, $r \cos(\theta - \alpha) = p$ সরলরেখাটি $\frac{l}{r} = 1 + e \cos \theta$ শঙ্কুচ্ছেদকে স্পর্শ করবে, যদি

$$(l \cos \alpha - ep)^2 + l^2 \sin^2 \alpha = p^2$$

হয়।

(খ) একটি চলমান সমতল (α, β, γ) বিন্দু দিয়ে যায় এবং অক্ষত্রয়েকে A, B এবং C বিন্দুতে ছেদ করে। দেখাও যে, A, B এবং C বিন্দুগামী ও অক্ষের সমান্তরাল সমতলগুলির ছেদবিন্দুর সঞ্চারণপথ হল

$$\alpha x^{-1} + \beta y^{-1} + \gamma z^{-1} = 1$$

৬। (ক) $\frac{l}{r} = 1 - e \cos \theta$ শঙ্কুচ্ছেদটির যে জ্যা-এর প্রান্তিক ভেক্টর কোণদ্বয় $(\alpha - \beta)$ ও $(\alpha + \beta)$, তার মেরু সমীকরণ নির্ণয় কর।

(খ) r ধ্রুব ব্যাসার্ধের একটি গোলক মূলবিন্দু দিয়ে যায় ও অক্ষত্রয়েকে যথাক্রমে A, B ও C বিন্দুতে ছেদ করে। প্রমাণ কর যে, মূলবিন্দু থেকে ABC সমতলের উপর অঙ্কিত লম্ব পাদবিন্দুর সঞ্চারণপথ হল

$$(x^2 + y^2 + z^2)^2 (x^{-2} + y^{-2} + z^{-2}) = 4r^2$$

বিভাগ—খ

৪। সমস্ত প্রশ্নের উত্তর দাও :

(ক) λ -এর কোন মানের জন্য $\lambda(3\hat{i} - 2\hat{j} + \hat{k})$ ভেক্টরটি একটি একক দৈর্ঘ্যের ভেক্টর বোঝায়, তা নির্ণয় কর।

(খ) $(\hat{i} + \hat{j} + \hat{k})$ ও $(3\hat{i} + 2\hat{j} - \hat{k})$ বিন্দুগামী সরলরেখাটির ভেক্টর সমীকরণ নির্ণয় কর।

৮। যে-কোন দুটি প্রশ্নের উত্তর দাও :

(ক) যদি $\vec{a} \times \vec{b} = \vec{c}, \vec{b} \times \vec{c} = \vec{a}$ এবং $\vec{c} \times \vec{a} = \vec{b}$ হয়, তাহলে দেখাও যে, $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ ভেক্টরগুলি পরস্পর পরস্পরের উপর লম্ব।

(খ) ভেক্টর পদ্ধতিতে প্রমাণ কর যে

$$\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C}$$

যেখানে ABC যে-কোন একটি ত্রিভুজ।

(গ) দেখাও যে, $\vec{a} = (1, -2, 3), \vec{b} = (-2, 3, -4)$ এবং $\vec{c} = (0, -1, 2)$ ভেক্টরগুলি সমতলীয়।

७। যে-কোন একটি প্রদত্ত উত্তর দাও :

(ক) (ii) দেখাও যে

$$[\vec{\alpha} + \vec{\beta} \quad \vec{\beta} + \vec{\gamma} \quad \vec{\gamma} + \vec{\alpha}] = 2[\vec{\alpha} \quad \vec{\beta} \quad \vec{\gamma}]$$

(iii) একটি কণা $4\vec{i} + \vec{j} - 3\vec{k}$ ও $3\vec{i} + \vec{j} - \vec{k}$ অবস্থানের অবস্থানে $\vec{i} + 2\vec{j} + 3\vec{k}$ বিন্দু থেকে $5\vec{i} + 4\vec{j} + \vec{k}$ বিন্দুতে স্থানান্তরিত হলে, কার্যকর পরিমাণ নির্ণয় কর।

(খ) মূলবিন্দুগামী ও $\vec{i} + 2\vec{j} + 3\vec{k}$ এবং $2\vec{i} - \vec{j} - \vec{k}$ ভেক্টরদ্বয়ের সমান্তরাল সমতলের ভেক্টর সমীকরণ নির্ণয় কর।

[NEPALI VERSION]

সমূহ—ক

প্রশ্ন নং ১ অনি রহলবাট কুনে তীনবটা প্রশ্নকা উত্তর দেऊ।

২×৪=৮

১. কুনে চারবটা প্রশ্নকা উত্তর দেऊ :

(ক) শংকু $r = \frac{1}{4-5\cos\theta}$ —কো প্রকৃতি (nature) নির্ণয় কর

সাথে यसको latus rectum-কো লমাই নির্ণয় কর।

(খ) সমীকরণ $ax^2 + xy - 12y^2 + 2x - 31y - 20 = 0$ ले दुईवटा सरल रेखाहरू दिन्छ भने a को मान निर्णय कर।

(ग) अक्षहरूलाई 30° कोणमा घुमाउँदा (rotation) समीकरण $4x^2 + 2\sqrt{3}xy + 2y^2 = 1$ को नयाँ रूप निर्णय कर।

(घ) वृत्त $x^2 + y^2 - 2x + 5 = 0$ को सापेक्षमा सरल रेखा $x + y + 3 = 0$ को ध्रुव (pole) निर्णय कर।

(ङ) समतलहरू $2x + 3y - z = 0$, $3x + 3y + z = 2$, $x - y + 2z = 5$ एउटा बिन्दुमा भेट्छ भनी प्रमाण कर।

(च) समतल $x + 2y + 3z = 6$ ले निर्देशांक अक्षहरूलाई (coordinate axes) A, B, C मा प्रतिच्छेद गर्छ भने O मूलबिन्दु भए गोलक (sphere) $OABC$ को समीकरण निर्णय कर।

२. (क) समीकरण $ax^2 + 2hxy + by^2 + 2gx + 2fy + c = 0$ ले एका अर्कालाई प्रतिच्छेद गर्ने दुईवटा सरल रेखाहरू दर्शाउँछ भने तिनीहरूको प्रतिच्छेदन बिन्दुदेखि मूलबिन्दुसम्मको दूत्वको वर्ग $\frac{c(a+b) - f^2 - g^2}{ab - h^2}$ हुन्छ भनी प्रमाण गर।

- (ख) मूलबिन्दुको सापेक्षमा आयताकार अक्ष प्रणाली (x, y) लाई परिध्रमण गराएर अक्ष प्रणाली (X, Y) मा परिणत गर्दा राशिमाला $ax^2 + 2hxy + by^2$ को नयाँ रूप

$$AX^2 + 2HXY + BY^2$$

भए प्रमाण गर

$$a + b = A + B \text{ अनि } ab - h^2 = AB - H^2$$

३. (क) शंकु $x^2 - 2xy + y^2 + 6x - 4y - 3 = 0$ लाई मानक रूपमा लघुकृत गर अनि यसको प्रकृति (nature) निर्णय गर।

- (ख) अतिपवलय $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$ को ती ज्याहरू

(chords) जसले केन्द्रमा समकोण बनाउँछ, तिनीहरूको ध्रुवहरूको बिन्दुपथ (locus) $\frac{x^2}{a^4} + \frac{y^2}{b^4} = \frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2}$ हुन्छ भनी प्रमाण गर।

४. (क) रेखाहरू

$$\frac{x}{l} + \frac{z}{n} = 1, y = 0; \quad \frac{y}{m} + \frac{z}{n} = 1, x = 0$$

को माझको सबभन्दा सानो दूत्व $2c$ भए, प्रमाण गर

$$\frac{1}{c^2} = \frac{1}{l^2} + \frac{1}{m^2} + \frac{1}{n^2}$$

- (ख) Focus लाई ध्रुव मान्नलिएर एउटा शंकुको ध्रुवीय समीकरणको एउटा रूप $\frac{l}{r} = 1 + e \cos \theta$ हुनुसक्छ भनी

प्रमाण गर।

५. (क) सरल रेखा $r \cos(\theta - \alpha) = p$ ले शंकु $\frac{l}{r} = 1 + e \cos \theta$

लाई छुन्छ यदि

$$(l \cos \alpha - ep)^2 + l^2 \sin^2 \alpha = p^2$$

भए भनी प्रमाण गर।

- (ख) एउटा परिवर्तनशील समतल, बिन्दु (α, β, γ) बाट पार हुन्छ अनि अक्षहरूलाई A, B अनि C मा भेट्छ। अक्षहरूसँग समानान्तर हुने अनि A, B, C बाट पार हुने समतलहरूको प्रतिच्छेदन बिन्दुको बिन्दुपथ (locus)

$$\alpha x^{-1} + \beta y^{-1} + \gamma z^{-1} = 1$$

हो भनी प्रमाण गर।

६. (क) शंकु $\frac{l}{r} = 1 - e \cos \theta$ मा सदिशीय (vectorial) कोण $(\alpha - \beta)$ अनि $(\alpha + \beta)$ हुने बिन्दुहरूलाई जोड्ने ज्या (chord) को ध्रुवीय समीकरण निर्माण गर।

- (ख) स्थिर व्यासार्ध r भएको एउटा गोलक (sphere) मूलबिन्दु O बाट पार हुन्छ अनि अक्षहरूलाई क्रमैले A , B अनि C मा प्रतिच्छेद गर्छ। O देखि समतल ABC मा कोरिने लम्ब (perpendicular) को पद (foot) को बिन्दुपथ (locus)

$$(x^2 + y^2 + z^2)^2 (x^{-2} + y^{-2} + z^{-2}) = 4r^2$$

हुन्छ भनी प्रमाण गर।

समूह—ख

७. सबै प्रश्नका उत्तर देऊ :

- (क) सदिश $\lambda(3\hat{i} - 2\hat{j} + \hat{k})$ को लमाइ एकाइ भए λ को मान निर्णय गर।

- (ख) बिन्दुहरू $(\hat{i} + \hat{j} + \hat{k})$ अनि $(3\hat{i} + 2\hat{j} - \hat{k})$ बाट पार हुने सरल रेखाको सदिश समीकरण निर्णय गर।

८. कुनै दुईवटा प्रश्नका उत्तर देऊ :

$$3 \times 2 = 6$$

- (क) यदि $\vec{a} \times \vec{b} = \vec{c}$, $\vec{b} \times \vec{c} = \vec{a}$ अनि $\vec{c} \times \vec{a} = \vec{b}$ भए सदिशहरू $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ आपसमा लम्बकोणीय छन् भनी प्रमाण गर।

- (ख) ABC एउटा त्रिकोण भए सदिश पद्धतिद्वारा प्रमाण गर

$$\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C}$$

- (ग) सदिशहरू $\vec{a} = (1, -2, 3)$, $\vec{b} = (-2, 3, -4)$ अनि $\vec{c} = (0, -1, 2)$ समतलीय छन् भनी प्रमाण गर।

९. कुनै एउटा प्रश्नका उत्तर देऊ :

- (क) (i) प्रमाण गर

$$[\vec{\alpha} + \vec{\beta} \quad \vec{\beta} + \vec{\gamma} \quad \vec{\gamma} + \vec{\alpha}] = 2[\vec{\alpha} \quad \vec{\beta} \quad \vec{\gamma}]$$

- (ii) स्थिर बलहरू $4\hat{i} + \hat{j} - 3\hat{k}$ अनि $3\hat{i} + \hat{j} - \hat{k}$ को प्रभावमा एउटा कण यदि $\hat{i} + 2\hat{j} + 3\hat{k}$ बिन्दुदेखि $5\hat{i} + 4\hat{j} + \hat{k}$ बिन्दुमा विस्थापित भए गरीएको काम (work done) निर्णय गर।

- (ख) मूलबिन्दुबाट पार हुने अनि सदिशहरू $\hat{i} + 2\hat{j} + 3\hat{k}$ अनि $2\hat{i} - \hat{j} - \hat{k}$ सँग समानान्तर हुने समतलको सदिश समीकरण निर्णय गर।

★★★

B I (Three Year G)
Under 1+1+1 System

2018

MATHEMATICS (General)

THIRD PAPER

(New Syllabus)

Time : 2 hours

Full Marks : 50

The figures in the margin indicate full marks.

GROUP—A

Answer Question No. 1 and any **four** from the rest.1. Answer any **four** questions : $2 \times 4 = 8$ (a) Is the function $f(x) = |x|$, $x \in \mathbb{R}$ derivable at $x = 0$?(b) Show that $1 + \frac{1}{3} + \frac{1}{9} + \frac{1}{27} + \dots$ is convergent and find its sum.(c) Show that the double limit $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{x+y}{x-y}$ does not exist.

(2)

- (d) Let $x_n = \frac{3n+1}{n+2}$. Is the sequence $\{x_n\}$ monotone increasing?

- (e) Find the n th order derivative of

$$y = \frac{x^2}{(x+2)(2x+3)}$$

- (f) If $u = f\left(\frac{y}{x}\right)$, then show that

$$x \frac{\partial u}{\partial x} + y \frac{\partial u}{\partial y} = 0$$

2. (a) If $u = \tan^{-1} \frac{x^3 + y^3}{x+y}$, then prove that

$$x \frac{\partial u}{\partial x} + y \frac{\partial u}{\partial y} = \sin 2u$$

Hence show that

$$x^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + 2xy \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + y^2 \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = (1 - 4 \sin^2 u) \sin 2u$$

- (b) Prove that

$$\lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{\tan x}{x} \right)^{\frac{1}{x}} = 1$$

3. (a) Expand $\sin x$ in a finite series in powers of x with remainder in Lagrange's form after n terms.

8MRD/330

(Continued)

(3)

- (b) Show that

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left[\frac{1}{\sqrt{n^2+1}} + \frac{1}{\sqrt{n^2+2}} + \dots + \frac{1}{\sqrt{n^2+n}} \right] = 1$$

4. (a) If $y = \frac{\sin^{-1} x}{\sqrt{1-x^2}}$, $|x| < 1$, then show that

$$(1-x^2)y_{n+2} - (2n+3)xy_{n+1} - (n+1)^2 y_n = 0$$

- (b) Show that the sequence

$$\left\{ \left(1 + \frac{1}{n} \right)^{n+1} \right\}$$

is monotonic.

5. (a) If

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{x^2 - y^2}{x^2 + y^2}, & \text{when } (x, y) \neq (0, 0) \\ 0, & \text{when } (x, y) = (0, 0) \end{cases}$$

then show that $f_{xy}(0, 0) \neq f_{yx}(0, 0)$.

- (b) Find y_n , when $y = \sin(ax+b)$.

6. (a) Find the asymptotes of the curve

$$x^3 + 2x^2y - 4xy^2 + 8y^3 - 4x + 8y - 10 = 0$$

- (b) Find the radius of curvature of the curve $y = c \cosh \frac{x}{c}$ at any point.

8MRD/330

(Turn Over)

(4)

7. (a) Prove that the curves $\frac{x^2}{a} + \frac{y^2}{b} = 1$ and $\frac{x^2}{c} + \frac{y^2}{d} = 1$ intersect orthogonally if $a + c = b + d$.
- (b) Give the geometric interpretation of Rolle's theorem.

GROUP—B

Answer any one question.

8. (a) Prove that a necessary condition that the function $f(z) = u + iv$ is differentiable at a point $z_0 = x_0 + iy_0$ is that u_x, u_y, v_x, v_y exist and $u_x = v_y, u_y = -v_x$ at the point (x_0, y_0) .
- (b) Suppose f is analytic in a domain D and $f'(z) = 0$ in D . Show that f is a constant.

9. (a) Show that the function

$$f(z) = \begin{cases} \frac{x^3(1+i) - y^3(1-i)}{x^2 + y^2} & \text{for } z = x + iy \neq 0 \\ 0 & \text{for } z = x + iy = 0 \end{cases}$$

satisfies C-R equations at the origin.

- (b) Show that $\lim_{z \rightarrow 0} \frac{\bar{z}}{z}$ does not exist.

- (c) Show that the function $u = \frac{1}{2} \log(x^2 + y^2)$ is harmonic.

8MRD/330

(Continued)

(5)

[BENGALI VERSION]

বিভাগ—ক

- ১ নং প্রশ্ন এবং অপর যে-কোন চারটি প্রশ্নের উত্তর দাও।
- ২। যে-কোন চারটি প্রশ্নের উত্তর দাও: $2 \times 8 = 16$

- (ক) $f(x) = |x|$, $x \in \mathbb{R}$ অপেক্ষকটি $x = 0$ বিন্দুতে অবকলনযোগ্য কিনা যাচাই কর।

- (খ) দেখাও যে $1 + \frac{1}{3} + \frac{1}{9} + \frac{1}{27} + \dots$ সিরিজটি অভিসারী এবং এর যোগফল নির্ণয় কর।

- (গ) দেখাও যে যুগ্মসীমা $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{x+y}{x-y}$ -এর অস্তিত্ব নেই।

- (ঘ) $\{x_n\}$ অনুক্রমটি ক্রমবর্ধমান কিনা বল, যেখানে $x_n = \frac{3n+1}{n+2}$.

- (ঙ) $y = \frac{x^2}{(x+2)(2x+3)}$ -এর n th ক্রমের অন্তরকলজ নির্ণয় কর।

- (চ) $u = f\left(\frac{y}{x}\right)$ হলে দেখাও যে $x \frac{\partial u}{\partial x} + y \frac{\partial u}{\partial y} = 0$

8MRD/330

(Turn Over)

(6)

২। (ক) $u = \tan^{-1} \frac{x^3 + y^3}{x + y}$ হলে প্রমাণ কর যে

$$x \frac{\partial u}{\partial x} + y \frac{\partial u}{\partial y} = \sin 2u, \text{ অতঃপর দেখাও যে}$$

$$x^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + 2xy \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + y^2 \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = (1 - 4 \sin^2 u) \sin 2u$$

(খ) প্রমাণ কর যে

$$\lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{\tan x}{x} \right)^{\frac{1}{x}} = 1$$

৩। (ক) n th পদের পরবর্তী Lagrange-এর আকারের অবশিষ্ট সহযোগে $\sin x$ কে x -এর ঘাতের সসীম সিরিজে বিস্তৃত কর।

(খ) দেখাও যে

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left[\frac{1}{\sqrt{n^2 + 1}} + \frac{1}{\sqrt{n^2 + 2}} + \dots + \frac{1}{\sqrt{n^2 + n}} \right] = 1$$

৪। (ক) যদি $y = \frac{\sin^{-1} x}{\sqrt{1 - x^2}}$, $|x| < 1$ হয়, তবে দেখাও যে

$$(1 - x^2)y_{n+2} - (2n + 3)xy_{n+1} - (n + 1)^2 y_n = 0$$

8MRD/330

(Continued)

(7)

(খ) দেখাও যে

$$\left\{ \left(1 + \frac{1}{n} \right)^{n+1} \right\}$$

অনুক্রমটি সমক্রমী।

(ক) যদি

$$f(x, y) = \begin{cases} xy \frac{x^2 - y^2}{x^2 + y^2}, & \text{যখন } (x, y) \neq (0, 0) \\ 0, & \text{যখন } (x, y) = (0, 0) \end{cases}$$

হয়, তবে দেখাও যে $f_{xy}(0, 0) \neq f_{yx}(0, 0)$.

(খ) y_n নির্ণয় কর যখন $y = \sin(ax + b)$.

৬। (ক) $x^3 + 2x^2y - 4xy^2 + 8y^3 - 4x + 8y - 10 = 0$ বক্রের স্পর্শপ্রণ রেখাগুলি নির্ণয় কর।

(খ) যে-কোন বিন্দুতে $y = c \cosh \frac{x}{c}$ বক্রের বক্রতা ব্যাসার্ধ নির্ণয় কর।

৭। (ক) প্রমাণ কর যে $\frac{x^2}{a} + \frac{y^2}{b} = 1$ এবং $\frac{x^2}{c} + \frac{y^2}{d} = 1$ বক্রদ্বয় পরস্পরকে সমকোণীয়ভাবে ছেদ করে যদি $a + c = b + d$ হয়।

(খ) Rolle-এর উপপাদ্যের জ্যামিতিক ব্যাখ্যা দাও।

(8MRD/330)

(Turn Over)

विभाग-थ

ये-कोन एकटि प्रश्नर उतर दाउ ।

- ८। (क) प्रमाण कर ये, $f(z) = u + iv$ अपेक्षक
 $z_0 = x_0 + iy_0$ बिन्दुते अवकलनयोगा इत्यार
 आवधिक शर्त हल (x_0, y_0) बिन्दुते
 u_x, u_y, v_x, v_y विद्यमान एवर $u_x = v_y$,
 $u_y = -v_x$.

- (ख) मने कर ये, f -एर संस्कार अक्षर D ते f वैश्लेषिक
 (analytic) एवर $f'(z) = 0$ । देखाउ ये f हल
 एकटि क्रवक ।

- ९। (क) देखाउ ये

$$f(z) = \begin{cases} \frac{x^3(1+i) - y^3(1-i)}{x^2 + y^2} & \text{यखन } z = x + iy \neq 0 \\ 0 & \text{यखन } z = x + iy = 0 \end{cases}$$

अपेक्षकटि C-R सर्किकरणशुनिके $(0, 0)$ बिन्दुते सिद्ध
 करे ।

- (ख) देखाउ ये $\text{Lt}_{z \rightarrow 0} \frac{\bar{z}}{z}$ -एर अस्तित्व नैई ।

- (ग) देखाउ ये $u = \frac{1}{2} \log(x^2 + y^2)$ अपेक्षकटि
 इराञ्चक ।

[NEPALI VERSION]

समूह-क

प्रश्न नं० १ अनि रहलबाट कुनै चारवटा प्रश्नका उत्तर देऊ ।

कुनै चारवटा प्रश्नका उत्तर देऊ : $2 \times 4 = 8$

- (क) $x = 0$ मा के फलन $f(x) = |x|$, $x \in \mathbb{R}$ अवकलनीय
 छ?

- (ख) $1 + \frac{1}{3} + \frac{1}{9} + \frac{1}{27} + \dots$ अभिकेन्द्रित छ भनी प्रमाण गर
 अनि यसको योगफल निर्णय गर ।

- (ग) $\text{Lt}_{(x, y) \rightarrow (0, 0)} \frac{x+y}{x-y}$ को मान निर्णय गर्न सकिदैन भनी
 प्रमाण गर ।

- (घ) $x_n = \frac{3n+1}{n+2}$ भए के अनुक्रम $\{x_n\}$ एकाग्र रूपले बढ्ने
 (monotone increasing) हुन्छ?

- (ङ) $y = \frac{x^2}{(x+2)(2x+3)}$ को n th श्रेणीको अवकलन
 (derivative) निर्णय गर ।

- (च) $u = f\left(\frac{y}{x}\right)$ भए प्रमाण गर $x \frac{\partial u}{\partial x} + y \frac{\partial u}{\partial y} = 0$.

(10)

२. (क) $u = \tan^{-1} \frac{x^3 + y^3}{x + y}$ भए प्रमाण गर

$$x \frac{\partial u}{\partial x} + y \frac{\partial u}{\partial y} = \sin 2u$$

साथै प्रमाण गर

$$x^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + 2xy \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + y^2 \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = (1 - 4 \sin^2 u) \sin 2u$$

(ख) प्रमाण गर :

$$\lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{\tan x}{x} \right)^{\frac{1}{x}} = 1$$

३. (क) n पद पछि Lagrange-को रहल भएको x को घातहरूमा (powers) $\sin x$ को सीमित (finite) श्रेणीक्रम निर्णय गर।

(ख) प्रमाण गर :

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left[\frac{1}{\sqrt{n^2 + 1}} + \frac{1}{\sqrt{n^2 + 2}} + \dots + \frac{1}{\sqrt{n^2 + n}} \right] = 1$$

४. (क) $y = \frac{\sin^{-1} x}{\sqrt{1 - x^2}}$, $|x| < 1$ भए प्रमाण गर

$$(1 - x^2) y_{n+2} - (2n+3) x y_{n+1} - (n+1)^2 y_n = 0$$

(11)

(ख) अनुक्रम $\left\{ \left(1 + \frac{1}{n} \right)^{n+1} \right\}$ एकाग्र (monotone) छ

भनी प्रमाण गर।

(क) $f(x, y) = \begin{cases} xy \frac{x^2 - y^2}{x^2 + y^2}, & (x, y) \neq (0, 0) \\ 0, & (x, y) = (0, 0) \end{cases}$

भए प्रमाण गर

$$f_{xy}(0, 0) \neq f_{yx}(0, 0)$$

(ख) $y = \sin(ax + b)$ भए y_n निर्णय गर।

(क) वक्र

$$x^3 + 2x^2y - 4xy^2 + 8y^3 - 4x + 8y - 10 = 0$$

को अनन्त-स्पर्शकहरू निर्णय गर।

(ख) कुनै बिन्दुमा वक्र $y = c \cosh \frac{x}{c}$ को वक्रताको व्यासार्ध (radius of curvature) निर्णय गर।

(क) वक्रहरू $\frac{x^2}{a} + \frac{y^2}{b} = 1$ अनि $\frac{x^2}{c} + \frac{y^2}{d} = 1$ एका

अर्कासँग लम्बकोणीय रूपमा भेट भए प्रमाण गर

$$a + c = b + d$$

(ख) Rolle-को उपपादको ज्यामितिक व्याख्या गर।

कुनै एउटा प्रश्नका उत्तर देऊ।

८. (क) बिन्दु $z_0 = x_0 + iy_0$ मा फलन $f(z) = u + iv$ अवकलनीय भए बिन्दु (x_0, y_0) मा u_x, u_y, v_x, v_y सबैको मान निर्णय गर्न सकिन्छ तथा त्यही बिन्दुमा $u_x = v_y, u_y = -v_x$ हुन्छ भनी प्रमाण गर।

- (ख) फलन f क्षेत्र (domain) D मा analytic भए अनि त्यही क्षेत्रमा $f'(z) = 0$ भए f एउटा स्थिराङ्क (constant) हो भनी प्रमाण गर।

९. (क) मूल बिन्दुमा फलन

$$f(z) = \begin{cases} \frac{x^3(1+i) - y^3(1-i)}{x^2 + y^2}, & z = x + iy \neq 0 \\ 0, & z = x + iy = 0 \end{cases}$$

ले C-R समीकरणहरू मानिलिन्छ भनी प्रमाण गर।

- (ख) $\lim_{z \rightarrow 0} \frac{\bar{z}}{z}$ को मान निर्णय गर्न सकिदैन भनी प्रमाण गर।

- (ग) फलन $u = \frac{1}{2} \log(x^2 + y^2)$ harmonic हो भनी प्रमाण गर।

★★★

2017

MATHEMATICS (General)

FIRST PAPER

(New Syllabus)

Full Marks : 50

Time : 2 hours

The figures in the margin indicate full marks.

GROUP—A

Answer Question No. 1 and any two from the rest.

1. (a) Determine the value of z , when $z^5 = \sqrt{3} + i$. 2

- (b) Find the remainder, when $x^{10} + x^7 + x^4 + x^3 + 1$ is divided by $x^2 + 1$. 2

- (c) Find the adjoint of the matrix $\begin{pmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix}$ 1

2. (a) Prove that the roots of the equation $\frac{1}{x+1} + \frac{1}{x+2} + \frac{1}{x+3} = \frac{1}{x}$ are all real. 4

(Turn Over)

MR7/331

- (b) Determine the values of a, b, c , when the matrix

$$\begin{pmatrix} 0 & 2b & c \\ a & b & -c \\ a & -b & c \end{pmatrix}$$

is orthogonal.

3. (a) If $2s = a + b + c$, then show that

$$\begin{vmatrix} a^2 & (s-a)^2 & (s-a)^2 \\ (s-b)^2 & b^2 & (s-b)^2 \\ (s-c)^2 & (s-c)^2 & c^2 \end{vmatrix} = 2s^3(s-a)(s-b)(s-c)$$

- (b) State and prove Rolle's theorem in algebra.

4. (a) If α, β, γ be the roots of the equation $x^3 + qx + r = 0$, then find the value of $\Sigma \alpha^5$.

- (b) If

$$x + \frac{1}{x} = 2 \cos \frac{\pi}{7}$$

then show that

$$x^7 + \frac{1}{x^7} + 2 = 0$$

- (a) Solve $x^3 - 6x - 9 = 0$ by Cardan's method. 5

- (b) Solve the equations by matrix method : 5

$$x + 2y + 3z = 10$$

$$2x + 5y + 7z = 23$$

$$x + z = 4$$

GROUP—B

Answer Question No. 6 and any two from the rest.

6. (a) Is the set $S = \{x : x + 3 = 3\}$ null? 1

- (b) Express the vector $(1, 7, -4)$ as a linear combination of the vectors $(1, -3, 2)$ and $(2, -1, 1)$ in the vector space $\mathbb{R}^3$. 2

- (c) Prove that the ring of even integers does not form a field. 2

7. (a) If A, B, C be three non-empty sets, then prove that $(A \cap B) - (A \cap C) = A \cap (B - C)$. 4

- (b) Let H and K be subgroups of the group $(G, *)$. Prove that $H \cap K$ is a subgroup of $(G, *)$. Find a pair of subgroups H and K of additive group $(\mathbb{Z}, +)$ of integers for which $H \cup K$ is not a subgroup of $(\mathbb{Z}, +)$. 4+2

(Turn Over)

8. (a) Show that the set $S = \{1, -1, i, -i\}$ forms a commutative group with respect to multiplication.

(b) In a ring $\{R, +, \cdot\}$, show that—

(i) $a \cdot 0 = 0 \cdot a = 0 \forall a \in R$, '0' being zero element in R ;

(ii) $a \cdot (-b) = (-a) \cdot b = -(a \cdot b)$, $a, b \in R$.

9. (a) Let $V = \{(x, y, z) : x, y, z \in R\}$, where R is the field of real numbers. Show that $W = \{(x, y, z) : x - 3y + 4z = 0\}$ is a subspace of V over R .

(b) Examine whether the quadratic form $5x^2 + y^2 + 10z^2 - 4yz - 10zx$ is positive definite or not.

10. (a) Show that the set of vectors

$$\{(1, 2, 1); (0, 1, 0); (0, 0, 1)\}$$

forms a basis over $\mathbb{R}^3$.

(b) For the set $\{0, 1, 2, 3, 4\}$, show that the modulo 5 system is a field.

বিভাগ—ক

১ নং প্রশ্ন এবং অন্য যে কোনো দুটি প্রশ্নের উত্তর দাও।

(ক) z -এর মান নির্ণয় কর, যখন $z^5 = \sqrt{3} + i$ ।

(খ) $x^{10} + x^7 + x^4 + x^3 + 1$ কে $x^2 + 1$ দিয়ে ভাগ করলে ভাগশেষ বের কর।

(গ) নিম্নলিখিত ম্যাট্রিক্সের adjoint নির্ণয় কর :

$$\begin{pmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix}$$

২। (ক) প্রমাণ কর যে, নিম্নলিখিত সমীকরণের বীজগুলো বাস্তব :

$$\frac{1}{x+1} + \frac{1}{x+2} + \frac{1}{x+3} = \frac{1}{x}$$

(খ) a, b, c -এর মান নির্ণয় কর, যখন ম্যাট্রিক্স

$$\begin{pmatrix} 0 & 2b & c \\ a & b & -c \\ a & -b & c \end{pmatrix}$$

একটি লব্ধ ম্যাট্রিক্স (orthogonal matrix)।

৩। (ক) যদি $2s = a + b + c$ হয়, তবে দেখাও যে

$$\left| \frac{a^2}{(s-b)^2} \frac{(s-a)^2}{b^2} \frac{(s-a)^2}{(s-c)^2} \right| = 2s^3 \frac{(s-a)(s-b)(s-c)}{c^2}$$

(খ) বীজগণিতের Rolle-এর তথ্যটি বিবৃত কর ও প্রমাণ কর।

৪। (ক) যদি $x^3 + qx + r = 0$ -এর বীজদ্বয় α, β, γ হয়, তবে $\Sigma \alpha^5$ -এর মান নির্ণয় কর।

(খ) যদি

$$x + \frac{1}{x} = 2 \cos \frac{\pi}{7}$$

হয়, তবে দেখাও যে

$$x^7 + \frac{1}{x^7} + 2 = 0$$

৫। (ক) নিম্নলিখিত সমীকরণটি Cardan-এর পদ্ধতিতে সমাধান কর :

$$x^3 - 6x - 9 = 0$$

(খ) ম্যাট্রিক্স পদ্ধতিতে নিম্নলিখিত সমীকরণগুলো সমাধান কর :

$$x + 2y + 3z = 10$$

$$2x + 5y + 7z = 23$$

$$x + z = 4$$

বিভাগ-খ

৬ নং প্রশ্ন এবং অন্য যে কোনো দুটি প্রশ্নের উত্তর দাও।

(ক) $S = \{x : x + 3 = 3\}$ সেটটি কি শূন্য সেট?

(খ) $(1, 7, -4)$ ভেক্টরকে $(1, -3, 2)$ এবং $(2, -1, 1)$ ভেক্টরদ্বয়ের রৈখিক সম্পর্কযুক্ত করে $\mathbb{R}^3$ ভেক্টরদেলে প্রকাশ কর।

(গ) প্রমাণ কর যে, ring of even integers একটি field (ক্ষেত্র) গঠন করে না।

(ক) যদি A, B, C তিনটি অশূন্য সেট হয়, তবে দেখাও যে $(A \cap B) - (A \cap C) = A \cap (B - C)$.

(খ) $(G, *)$ group-এর H ও K দুটি subgroup হলে দেখাও যে, $H \cap K$ একটি $(G, *)$ -এর subgroup. Additive group $(\mathbb{Z}, +)$ -এর এক জোড়া subgroup H এবং K নির্ণয় কর, যেখানে $H \cup K (\mathbb{Z}, +)$ -এর subgroup নয়।

(ক) দেখাও যে, $S = \{1, -1, i, -i\}$ সেটটি গুণনের সাপেক্ষে একটি বিনিময়যোগ্য (commutative) গ্রুপ (group).

(খ) দেখাও যে, ring $\{R, +, \cdot\}$ -এ

(i) $a \cdot 0 = 0 \cdot a = 0 \quad \forall a \in R$, R -এ '0' হল শূন্য উপাদান (zero element);

(ii) $a \cdot (-b) = (-a) \cdot b = -(a \cdot b)$, $a, b \in R$.

- ७। (क) यदि $V = \{(x, y, z) : x, y, z \in R\}$, जहाँ R एक वस्तु-संरक्षित क्षेत्र (field) है, तब $W = \{(x, y, z) : x - 3y + 4z = 0\}$ $V(R)$ का उप-विक्षेत्र (subspace) है।

- (ख) परीक्षा कर के, द्विघात रूप (quadratic form) $5x^2 + y^2 + 10z^2 - 4yz - 10zx$ एक धनात्मक (positive definite) है किना।

- १०। (क) देखाओ कि $\{(1, 2, 1), (0, 1, 0), (0, 0, 1)\}$ $\mathbb{R}^3$ का एक आधार (basis) है।

- (ख) देखाओ कि $\{0, 1, 2, 3, 4\}$ घड़ियों के modulo 5 system का एक क्षेत्र (field) है।

समूह-क

प्रश्न नं० १ अनि रहलबाट कुनै दुईवटा प्रश्नका उत्तर देऊ।

- (क) यदि $z^5 = \sqrt{3} + i$ भए z को मान निर्णय गर। २

- (ख) $x^{10} + x^7 + x^4 + x^3 + 1$ लाई $x^2 + 1$ ले भाग गर्दा पाइने रहल कति हुन्छ? २

- (ग) मेट्रिक्स $\begin{pmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix}$ को adjoint निर्णय गर। १

- (क) समीकरण $\frac{1}{x+1} + \frac{1}{x+2} + \frac{1}{x+3} = \frac{1}{x}$ को सबै मूल (root)-हरू वास्तविक हुन् भनी प्रमाण गर। ४

- (ख) मेट्रिक्स $\begin{pmatrix} 0 & 2b & c \\ a & b & -c \\ a & -b & c \end{pmatrix}$ लम्बकोणीय भए a, b, c को मान निर्णय गर। ६

३. (क) यदि $2s = a + b + c$ भए प्रमाण गर

$$\left| \frac{a^2}{(s-b)^2} \frac{(s-a)^2}{b^2} \frac{(s-a)^2}{(s-c)^2} \right| = 2s^3 (s-a)(s-b)(s-c)$$

(ख) बीजगणितमा Rolle-को उपपाद्यालाई उल्लेख गरी प्रमाण गर।

४. (क) यदि α, β, γ समीकरण $x^3 + qx + r = 0$ को मूलहरू भए $\Sigma \alpha^5$ को मान निकाल।

(ख) यदि

$$x + \frac{1}{x} = 2 \cos \frac{\pi}{7}$$

तब प्रमाण गर

$$x^7 + \frac{1}{x^7} + 2 = 0$$

५. (क) कार्डेन (Cardan)-को पद्धतिद्वारा समाधान गर :

$$x^3 - 6x - 9 = 0$$

(ख) तलको समीकरणसमूह मेट्रिक्स पद्धतिद्वारा समाधान गर :

$$\begin{aligned} x + 2y + 3z &= 10 \\ 2x + 5y + 7z &= 23 \\ x + z &= 4 \end{aligned}$$

समूह—ख

प्रश्न नं० ६ अनि रहलबाट कुनै दुईवटा प्रश्नका उत्तर देऊ।

(क) के यो सेट $S = \{x : x + 3 = 3\}$ शून्य (null) सेट हो? १

(ख) सदिश $(1, 7, -4)$ लाई सदिशमण्डल $\mathbb{R}^3$ मा सदिशहरू $(1, -3, 2)$ अनि $(2, -1, 1)$ को linear combination-मा अभिव्यक्त गर। २

(ग) जोडी पूर्णसंख्याहरूको रिकले (ring of even integers) field गठन हुँदैन भनी प्रमाण गर। २

(क) यदि A, B, C तीन non-empty सेट भए प्रमाण गर $(A \cap B) - (A \cap C) = A \cap (B - C)$ ४

(ख) यदि H अनि K ग्रुप $(G, *)$ को सबग्रुपहरू भए प्रमाण गर $H \cap K$ पनि ग्रुप $(G, *)$ को सबग्रुप हो भनी। पूर्णसंख्याहरूको ग्रुप $(\mathbb{Z}, +)$ को एउटा यस्तो सबग्रुप जोडी H अनि K निर्णय गर जसमा $H \cup K, (\mathbb{Z}, +)$ को सबग्रुप हुँदैन। ४+२

६. (क) सेट $S = \{1, -1, i, -i\}$ ले गुणनफलसँग एउटा क्रमविनिमेय समूह (commutative group) गठन गर्छ भनी प्रमाण गर। ४

(ख) कुनै एउटा रिङ $\{R, +, \cdot\}$ मा, प्रमाण गर—

- (i) $a \cdot 0 = 0 \cdot a = 0 \quad \forall a \in R$, '0' R को शून्य element हो; ३+३
- (ii) $a \cdot (-b) = (-a) \cdot b = -(a \cdot b)$, $a, b \in R$.

(Turn Over)

१. (क) यदि $V = \{(x, y, z) : x, y, z \in R\}$ भए, जहाँ R वास्तविक संख्याहरूको field हो, प्रमाण गर $W = \{(x, y, z) : x - 3y + 4z = 0\}$, R माथि वर्णन गरिएको V को उपसदिशमण्डल हो भनी।

(ख) Quadratic form

$$5x^2 + y^2 + 10z^2 - 4yz - 10zx$$

positive definite हो या होइन भनी जाँच गर।

१०. (क) सदिशहरूको सेट

$$\{(1, 2, 1); (0, 1, 0); (0, 0, 1)\}$$

$\mathbb{R}^3$ को आधार हो भनी प्रमाण गर।

- (ख) सेट $\{0, 1, 2, 3, 4\}$ को लागि, modulo 5 system, field हो भनी प्रमाण गर।

★★★

MR7—4920/331

B I (Three Year G)
Under 1+1+1 System

2017

MATHEMATICS (General)

SECOND PAPER

(New Syllabus)

Full Marks : 50

Time : 2 hours

The figures in the margin indicate full marks.

GROUP—A

Answer Question No. 1 and any three from the rest.

1. Answer any four questions : $2 \times 4 = 8$

- (a) If $ax + by$ transforms to $a'x' + b'y'$ due to rotation of axes, then show that

$$a^2 + b^2 = a'^2 + b'^2$$

- (b) Show that

$$6x^2 - 5xy - 6y^2 + 14x + 5y + 4 = 0$$

represents a pair of perpendicular straight lines.

- (c) Find a point on the conic

$$\frac{l}{r} = 1 - e \cos \theta$$

having the least radius vector.

MR7/332

(Turn Over)

(2)

- (d) If $\cos \alpha$, $\cos \beta$, $\cos \gamma$ are the direction cosines of a line, then show that

$$\sin^2 \alpha + \sin^2 \beta + \sin^2 \gamma = 2$$

- (e) Find the equation of the directrix of the parabola $x^2 + 4x + y = 0$.

- (f) Find the radius of the circle represented by $x^2 - 4x + y^2 + 2y = 0$ and $z = -1$.

2. (a) An ellipse slides between two straight lines at right angle to each other. Show that the locus of its centre is a circle.

- (b) Prove that the angle between the lines joining the origin to the intersection of the straight line $y = 3x + 2$ with the curve

$$x^2 + 2xy + 3y^2 + 4x + 8y - 11 = 0$$

$$\text{is } \tan^{-1} \left(\frac{2\sqrt{2}}{3} \right).$$

3. (a) If $ax^2 + 2hxy + by^2 + 2gx + 2fy + c = 0$ represents two straight lines equidistant from origin, then show that

$$f^4 - g^4 = c(bf^2 - ag^2)$$

- (b) Reduce the equation

$$16x^2 - 24xy + 9y^2 - 104x - 172y + 44 = 0$$

to its canonical form and show that it represents a parabola of latus rectum 8 units.

MR7/332

(Continued

(3)

- (a) If two conics $\frac{l_1}{r} = 1 - e_1 \cos \theta$ and

$\frac{l_2}{r} = 1 - e_2 \cos(\theta - \alpha)$ touch one another, then show that

$$l_1^2(1 - e_2^2) + l_2^2(1 - e_1^2) = 2l_1l_2(1 - e_1e_2 \cos \alpha) \quad 5$$

- (b) Find the shortest distance between

$$\frac{x-3}{-3} = \frac{y-8}{1} = \frac{z-3}{-1} \quad \text{and} \quad \frac{x+3}{3} = \frac{y+7}{-2} = \frac{z-6}{-4}$$

and the equation of the line of shortest distance. 4

5. (a) Find the equation of the sphere for which the circle

$$x^2 + y^2 + z^2 + 2x - 2y + 2z + 5 = 0,$$

$$2x - 4y + 6z + 1 = 0$$

is a great circle. 4

- (b) Show that the magnitude of the shortest distance between the y -axis and the straight line $\frac{x-1}{5} = \frac{y-7}{-4} = \frac{z+3}{12}$ is

$$\frac{27}{13} \text{ units.} \quad 5$$

(Turn Over)

6. (a) Prove that the straight lines $\frac{x-2}{3} = \frac{y-3}{4} = \frac{z-4}{5}$ and $\frac{x-3}{4} = \frac{y-4}{5} = \frac{z-5}{6}$ are coplanar and find the equation of the plane.

- (b) Show that the locus of the poles of the tangent to director circle of the ellipse

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$

$$\text{is } \frac{x^2}{a^4} + \frac{y^2}{b^4} = \frac{1}{a^2 + b^2}.$$

GROUP—B

7. (a) Given $\vec{a} = \vec{i} - 2\vec{j}$ and $\vec{b} = \vec{j} + \vec{k}$. Find the component of $\vec{a}$ along $\vec{b}$.

- (b) How are the vector products $\vec{\alpha} \times \vec{\beta}$, $\vec{\beta} \times \vec{\gamma}$ and $\vec{\gamma} \times \vec{\alpha}$ are related when $\vec{\alpha} + \vec{\beta} + \vec{\gamma} = 0$?

8. Answer any **two** questions : 3×2=

- (a) Show by vector method that the points $A(\vec{i} + 5\vec{j} - \vec{k})$, $B(4\vec{j} + 5\vec{k})$, $C(-\vec{i} + 5\vec{j} + \vec{k})$ and $D(2\vec{i} + 4\vec{j} + 3\vec{k})$ are coplanar.

- (b) If $\vec{\alpha}$, $\vec{\beta}$, $\vec{\gamma}$ are three vectors such that $|\vec{\alpha}| = 3$, $|\vec{\beta}| = 4$, $|\vec{\gamma}| = 5$ and satisfy the condition $\vec{\alpha} + \vec{\beta} + \vec{\gamma} = 0$, then find the value of $\vec{\alpha} \cdot \vec{\beta} + \vec{\beta} \cdot \vec{\gamma} + \vec{\gamma} \cdot \vec{\alpha}$.

- (c) Find the area of parallelogram having $\vec{\alpha} = 2\vec{i} - \vec{j} + \vec{k}$ and $\vec{\beta} = 3\vec{i} + 4\vec{j} - \vec{k}$ as its diagonals.

6

9. Answer any **one** question :

- (a) A force of 15 units acts in the direction of the vector $(\vec{i} - 2\vec{j} + 2\vec{k})$ and passes through the point $(2\vec{i} - 2\vec{j} + 2\vec{k})$. Find the moment of the force about the point $(\vec{i} + \vec{j} + \vec{k})$.

- (b) Show by vector method that the medians of a triangle are concurrent.

[BENGALI VERSION]

বিভাগ-ক

১ নং প্রশ্ন এবং আরও যে-কোন তিনটি প্রশ্নের উত্তর দাও।

১। যে-কোন চারটি প্রশ্নের উত্তর দাও :

(ক) অক্ষদ্বয়ের ঘূর্ণনের ফলে $ax+by$ রূপান্তরিত হয়ে $a'x'+b'y'$ হলে, দেখাও যে

$$a^2 + b^2 = a'^2 + b'^2$$

(খ) দেখাও যে $6x^2 - 5xy - 6y^2 + 14x + 5y + 4 = 0$ সমীকরণ একটি পরম্পর লম্ব যুগ্ম সরলরেখাকে নির্দেশ করে।

(গ) $\frac{l}{r} = 1 - e \cos \theta$ শঙ্কুচ্ছেদ (conic)-এর ওপর এরূপ একটি বিন্দু নির্ণয় করো যার দূরক (radius vector) ক্ষুদ্রতম।

(ঘ) $\cos \alpha, \cos \beta, \cos \gamma$ কোন রেখার কোসাইন দিগাঙ্ক গোষ্ঠী (direction cosine) হলে, দেখাও যে

$$\sin^2 \alpha + \sin^2 \beta + \sin^2 \gamma = 2$$

(ঙ) $x^2 + 4x + y = 0$ অধিবৃত্তের নিয়ামকের সমীকরণ নির্ণয় করো।

(চ) $x^2 - 4x + y^2 + 2y = 0$ এবং $z = -1$ দ্বারা নির্দেশিত বৃত্তের ব্যাসার্ধ নির্ণয় করো।

MR7/332

(Continued)

(ক) একটি উপবৃত্ত দুটি পরম্পর লম্ব সরলরেখার মধ্যে বিসর্পন (slide) করলে, প্রমাণ করো যে উপবৃত্তের কেন্দ্রের সঞ্চারপথ একটি বৃত্ত।

(খ) প্রমাণ করো যে, মূলবিন্দু ও $y = 3x + 2$ সরলরেখার সহিত $x^2 + 2xy + 3y^2 + 4x + 8y - 11 = 0$ বক্রের ছেদবিন্দুদ্বায়ে যুগ্ম সরলরেখার অন্তর্বর্তী কোণ $\tan^{-1} \left(\frac{2\sqrt{2}}{3} \right)$ ।

(ক) $ax^2 + 2hxy + by^2 + 2gx + 2fy + c = 0$ সমীকরণ মূলবিন্দু থেকে সমদূরবর্তী দুটি সরলরেখাকে নির্দেশ করলে, দেখাও যে

$$f^4 - g^4 = c(bf^2 - ag^2)$$

(খ) $16x^2 - 24xy + 9y^2 - 104x - 172y + 44 = 0$ সমীকরণটিকে আদর্শ আকারে (canonical form) প্রকাশ করো। দেখাও যে সমীকরণটি একটি অধিবৃত্তকে নির্দেশ করে যার নাভিলম্বের দৈর্ঘ্য ৪ একক।

৪। (ক) যদি দুটি শঙ্কুচ্ছেদ $\frac{l_1}{r} = 1 - e_1 \cos \theta$ এবং $\frac{l_2}{r} = 1 - e_2 \cos (\theta - \alpha)$ পরস্পরকে স্পর্শ করে, তবে দেখাও যে

$$l_1^2 (1 - e_2^2) + l_2^2 (1 - e_1^2) = 2l_1 l_2 (1 - e_1 e_2 \cos \alpha)$$

(Turn Over)

(খ) $\frac{x-3}{-3} = \frac{y-8}{1} = \frac{z-3}{-1}$ এবং $\frac{x+3}{3} = \frac{y+7}{-2} = \frac{z-6}{-4}$

সরলরেখা দুটির মধ্যবর্তী ক্ষুদ্রতম দূরত্ব নির্ণয় করো এবং ক্ষুদ্রতম দূরত্বে অবস্থিত রেখার সমীকরণ নির্ণয় করো।

৫। (ক) যে গোলকের গুরু বৃত্ত (great circle)

$$x^2 + y^2 + z^2 + 2x - 2y + 2z + 5 = 0,$$

$$2x - 4y + 6z + 1 = 0$$

তার সমীকরণ নির্ণয় করো।

(খ) দেখাও যে y -অক্ষ এবং $\frac{x-1}{5} = \frac{y-7}{-4} = \frac{z+3}{12}$ সরলরেখার ক্ষুদ্রতম দূরত্বের মান $\frac{27}{13}$ একক।

৬। (ক) প্রমাণ করো যে, $\frac{x-2}{3} = \frac{y-3}{4} = \frac{z-4}{5}$ এবং $\frac{x-3}{4} = \frac{y-4}{5} = \frac{z-5}{6}$ সরলরেখা দুটি সামতলিক।
এই সমতলের সমীকরণ নির্ণয় করো।

(খ) দেখাও যে $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ উপবৃত্তের সহায়ক বৃত্তের স্পর্শকের মেরুর সঞ্চারপথের সমীকরণ হল

$$\frac{x^2}{a^4} + \frac{y^2}{b^4} = \frac{1}{a^2 + b^2}$$

8

বিভাগ—খ

(ক) $\vec{a} = \vec{i} - 2\vec{j}$ এবং $\vec{b} = \vec{j} + \vec{k}$ হলে ভেক্টর $\vec{a}$ এর $\vec{b}$ ভেক্টরের দিকে উপাংশ ভেক্টর নির্ণয় করো।

5

(খ) $\vec{\alpha} + \vec{\beta} + \vec{\gamma} = 0$ হলে $\vec{\alpha} \times \vec{\beta}$, $\vec{\beta} \times \vec{\gamma}$ ও $\vec{\gamma} \times \vec{\alpha}$ কীরূপ সম্পর্কযুক্ত হবে?

2

৩। যে-কোন দুটি প্রশ্নের উত্তর দাও :

$$3 \times 2 = 6$$

(ক) ভেক্টর পদ্ধতিতে দেখাও যে $A(\vec{i} + 5\vec{j} - \vec{k})$,
 $B(4\vec{j} + 5\vec{k})$, $C(-\vec{i} + 5\vec{j} + \vec{k})$ এবং
 $D(2\vec{i} + 4\vec{j} + 3\vec{k})$ বিন্দু চারটি সামতলিক।

(খ) $\vec{\alpha}$, $\vec{\beta}$, $\vec{\gamma}$ তিনটি ভেক্টর এরূপ যে $|\vec{\alpha}| = 3$, $|\vec{\beta}| = 4$,
 $|\vec{\gamma}| = 5$ এবং $\vec{\alpha} + \vec{\beta} + \vec{\gamma} = 0$ তাহলে
 $\vec{\alpha} \cdot \vec{\beta} + \vec{\beta} \cdot \vec{\gamma} + \vec{\gamma} \cdot \vec{\alpha}$ রাশিটির মান নির্ণয় করো।

(গ) কোন সামান্তরিকের $\vec{\alpha} = 2\vec{i} - \vec{j} + \vec{k}$ এবং
 $\vec{\beta} = 3\vec{i} + 4\vec{j} - \vec{k}$ দুটি কর্ণ হলে এই সামান্তরিকের
ক্ষেত্রফল নির্ণয় করো।

७। ये-कोन एकटि प्रश्नर उत्तर दाउ :

- (क) 15 एककेर एकटि वन $(\vec{i} - 2\vec{j} + 2\vec{k})$ -एर दिने क्रियाशील एवः $(2\vec{i} - 2\vec{j} + 2\vec{k})$ विन्दुगति।
 $(\vec{i} + \vec{j} + \vec{k})$ विन्दु साधेन वनतिर जात्रक निर्णय करो।
- (ख) डेक्कैर पक्षतिडे देखाउ ये विन्दुकेर यथाया तिनति सम्बन्ध।

[NEPALI VERSION]

समूह-क

प्रश्न नं० १ अनि रहलवाट कुनै तीनवटा प्रश्नका उत्तर देऊ।

२×४=८

कुनै चारवटा प्रश्नका उत्तर देऊ :

- (क) अक्षरूलाई परिप्रमाण गरी यदि $ax + by$ लाई $a'x' + b'y'$ मा परिवर्तन गरियो भने $a^2 + b^2 = a'^2 + b'^2$ हुन्छन् भनी प्रमाण गर।

- (ख) $6x^2 - 5xy - 6y^2 + 14x + 5y + 4 = 0$ ले दुईवटा लम्ब सलरेखाहरू दिन्छन् भनी प्रमाण गर।

- (ग) शाङ्ख $\frac{l}{r} = 1 - e \cos \theta$ को त्यो बिन्दु निर्णय गर जसको व्यासार्ध सदिश (radius vector) सबैभन्दा सानो हुन्छ।

- (घ) यदि $\cos \alpha, \cos \beta, \cos \gamma$ एउटा रेखाको direction cosines भए

$$\sin^2 \alpha + \sin^2 \beta + \sin^2 \gamma = 2$$

हुन्छ भनी प्रमाण गर।

- (ङ) परवलय $x^2 + 4x + y = 0$ को directrix-को समीकरण निर्णय गर।

- (च) वृत्त $x^2 - 4x + y^2 + 2y = 0$ अनि $z = -1$ को व्यासार्ध निर्णय गर।

२. (क) एका-अर्कसँग लम्बकोणीय रहेको दुईवटा सरल रेखाहरू-माझ एउटा अण्डवृत्त स्टाइड गर्छ भने केन्द्रबिन्दुको पथ (locus) एउटा वृत्त हुन्छ भनी प्रमाण गर।

(ख) सरलरेखा $y = 3x + 2$ र वक्र

$$x^2 + 2xy + 3y^2 + 4x + 8y - 11 = 0$$

को प्रतिच्छेदित बिन्दु र मूल बिन्दुलाई जोड्ने दुई रेखाहरूमाझको कोण $\tan^{-1}\left(\frac{2\sqrt{2}}{3}\right)$ हो भनी प्रमाण गर।

३. (क) यदि $ax^2 + 2hxy + by^2 + 2gx + 2fy + c = 0$ ले मूल बिन्दु (origin) देखि समान दूरत्व भएको दुईवटा सरलरेखा दर्शाउँछ भने प्रमाण गर $f^4 - g^4 = c(bf^2 - ag^2)$.

(ख) $16x^2 - 24xy + 9y^2 - 104x - 172y + 44 = 0$ समीकरणलाई मानक रूपमा लघुकृत गर अनि यसले 8 units latus rectum भएको परवलय दर्शाउँछ भनी प्रमाण गर।

४. (क) यदि दुई शाङ्कव $\frac{l_1}{r} = 1 - e_1 \cos \theta$ अनि $\frac{l_2}{r} = 1 - e_2 \cos (\theta - \alpha)$ एका-अर्कसँग स्पर्श गर्छ भने $l_1^2 (1 - e_2^2) + l_2^2 (1 - e_1^2) = 2l_1 l_2 (1 - e_1 e_2 \cos \alpha)$ हुन्छ भनी प्रमाण गर।

(iii) $\frac{x-3}{-3} = \frac{y-8}{1} = \frac{z-3}{-1}$ अनि $\frac{x+3}{3} = \frac{y+7}{-2} = \frac{z-6}{-4}$

माझको सबभन्दा सानो दूरत्व निर्णय गर अनि सबभन्दा सानो दूरत्व भएको रेखाको समीकरण निर्णय गर।

(क) वृत्त $x^2 + y^2 + z^2 + 2x - 2y + 2z + 5 = 0$, $2x - 4y + 6z + 1 = 0$ एउटा वृहत्तम वृत्त (great circle) हुने गोलकको समीकरण निर्णय गर।

(ख) y -अक्ष अनि सरलरेखा $\frac{x-1}{5} = \frac{y-7}{-4} = \frac{z+3}{12}$

माझको सबैभन्दा सानो दूरत्वको मान $\frac{27}{13}$ units हो भनी प्रमाण गर।

(क) सरलरेखाहरू $\frac{x-2}{3} = \frac{y-3}{4} = \frac{z-4}{5}$ अनि $\frac{x-3}{4} = \frac{y-4}{5} = \frac{z-5}{6}$ समतलीय छन् भनी प्रमाण गर अनि समतलको समीकरण निर्णय गर।

(ख) अण्डवृत्त $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ को director वृत्तमाथि रहेको

स्पर्शज्या (tangent)-को poles-को locus

$$\frac{x^2}{a^4} + \frac{y^2}{b^4} = \frac{1}{a^2 + b^2}$$

४

(14)

समूह—ख

७. (क) दिएको $\vec{a} = \vec{i} - 2\vec{j}$ अनि $\vec{b} = \vec{j} + \vec{k}$. सदिश $\vec{b}$ को दिशामा $\vec{a}$ को component निर्णय गर।

(ख) जब $\vec{\alpha} + \vec{\beta} + \vec{\gamma} = 0$ भए सदिशहरूको गुणफल $\vec{\alpha} \times \vec{\beta}$, $\vec{\beta} \times \vec{\gamma}$ अनि $\vec{\gamma} \times \vec{\alpha}$ कसरी सम्बन्धित छ?

८. कुनै दुईवटा प्रश्नका उत्तर देऊ :

(क) सदिश पद्धतिद्वारा बिन्दुहरू $A(\vec{i} + 5\vec{j} - \vec{k})$, $B(4\vec{j} + 5\vec{k})$, $C(-\vec{i} + 5\vec{j} + \vec{k})$ अनि $D(2\vec{i} + 4\vec{j} + 3\vec{k})$ समतलीय छन् भनी प्रमाण गर।

(ख) यदि तीन सदिशहरू $\vec{\alpha}$, $\vec{\beta}$, $\vec{\gamma}$ यस्तो छन् $|\vec{\alpha}| = 3$, $|\vec{\beta}| = 4$, $|\vec{\gamma}| = 5$ अनि $\vec{\alpha} + \vec{\beta} + \vec{\gamma} = 0$ शर्तलाई मानि लिन्छन् भने $\vec{\alpha} \cdot \vec{\beta} + \vec{\beta} \cdot \vec{\gamma} + \vec{\gamma} \cdot \vec{\alpha}$ को मान निकाल।

(ग) विकर्ण (Diagonal) $\vec{\alpha} = 2\vec{i} - \vec{j} + \vec{k}$ अनि $\vec{\beta} = 3\vec{i} + 4\vec{j} - \vec{k}$ भएको समानान्तर चतुर्भुजको क्षेत्रफलको मान निर्णय गर।

MR7/332

(Continued)

MIR7-4920/332

(15)

१. एउटा प्रश्नका उत्तर देऊ :

(क) सदिश $(\vec{i} - 2\vec{j} + 2\vec{k})$ को दिशामा क्रियाशील अनि बिन्दु $(2\vec{i} - 2\vec{j} + 2\vec{k})$ बाट प्रतिच्छेदन हुने 15 units बलको बिन्दु $(\vec{i} + \vec{j} + \vec{k})$ को ओरिपरि भ्रामक निर्णय गर।

(ख) एउटा त्रिभुजको मध्यस्थहरू (medians) समान बिन्दुगामी (concurrent) छन् भनी सदिश पद्धतिद्वारा प्रमाण गर।

B I (Three Year G)
Under 1+1+1 System

2017

MATHEMATICS (General)

THIRD PAPER

(New Syllabus)

Full Marks : 50

Time : 2 hours

The figures in the margin indicate full marks.

GROUP—A

Answer Question No. 1 and any four from the rest.

1. Answer any **four** questions : $2 \times 4 = 8$

- (a) Define limit of a sequence.
- (b) Find the asymptotes of the curve $x^3 + y^3 = 3axy$.

(c) Show that

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin^2 x}{x^2} = 1$$

- (d) Give an example of a function which is continuous at a point but not differentiable at that point.

(e) Show that the series

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{n+1}$$

is not convergent.

(f) If $u = f\left(\frac{y}{x}\right)$, then show that

$$x \frac{\partial u}{\partial x} + y \frac{\partial u}{\partial y} = 0$$

2. (a) State and prove Cauchy's general principle of convergence.

(b) Find the radius of curvature at the origin of $y^2 = 4ax$.

3. (a) State and prove Cauchy's mean value theorem.

(b) Let

$$f(x, y) = x \sin \frac{1}{y} + y \sin \frac{1}{x}, \text{ when } xy \neq 0$$

$$= 0$$

Prove that $\lim_{(x, y) \rightarrow (0, 0)} f(x, y) = 0$.

4. (a) Examine the convergence of the series

$$x + \frac{1!}{2^2} x^2 + \frac{2!}{3^3} x^3 + \frac{3!}{4^4} x^4 + \dots$$

(b) Find the largest rectangle that can be inscribed within the circle $x^2 + y^2 = a^2$.

MR7/333

(Continued

(a) Obtain the asymptotes of

$$y = \frac{3x}{2} \log \left(e - \frac{1}{3x} \right)$$

(b) Evaluate

$$\lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{\sin x}{x} \right)^{\frac{1}{x^2}}$$

(a) Obtain the relation $p = r \sin \phi$, where p, r and ϕ have their usual meanings, and use it to find the pedal equation of the curve $r = a(1 - \cos \theta)$.

(b) Find y_n , when $y = 5 \log x$.

(a) State and prove Leibnitz's theorem.

(b) Find the envelope of the family of coaxial ellipses $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$, where

$$a^3 + b^3 = c^3.$$

GROUP—B

Answer any one question.

8. (a) Define analytic function.

(b) Show that $f(z) = \bar{z}$ is continuous but not differentiable at $(0, 0)$.

MR7/333

(Turn Over)

(c) Show that $u(x, y) = e^{x^2 - y^2} \cdot \cos 2xy$ is a harmonic function. Find the harmonic conjugate of u .

9. (a) Prove that the function $f(z) = |z|^2$ is continuous everywhere but nowhere differentiable except at the origin.

(b) Define harmonic function. Show that the harmonic function u satisfies the differential equation

$$\frac{\partial^2 u}{\partial z \partial \bar{z}} = 0$$

(c) Show that the real part of an analytic function satisfies Laplace's equation.

[BENGALI VERSION]

বিভাগ-ক

১ নং প্রশ্ন এবং অপর যে-কোন চারটি প্রশ্নের উত্তর দাও।

২ নং-কোন চারটি প্রশ্নের উত্তর দাও : $2 \times 8 = 8$

(ক) অনুক্রম (Sequence)-এর সীমা (limit) বলতে কি বোঝ?

(খ) $x^3 + y^3 = 3axy$ বক্রটির স্পর্শপ্রবণরেখা (asymptote)-গুলো বের কর।

(গ) দেখাও যে

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin^2 x}{x^2} = 1$$

(ঘ) একটি অপেক্ষকের উদাহরণ দাও যেটি কোন একটি বিন্দুতে সন্তত (continuous) কিন্তু অবকলনযোগ্য (differentiable) নয়।

(ঙ) দেখাও যে $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{n+1}$ শ্রেণীটি অভিসারী নয়।

(চ) যদি $u = f\left(\frac{y}{x}\right)$ হয়, তবে দেখাও যে

$$x \frac{\partial u}{\partial x} + y \frac{\partial u}{\partial y} = 0$$

২। (ক) Cauchy-র অভিসরণের (convergence) সাধারণ নীতি বিবৃত ও প্রমাণ কর।

(খ) মূলবিন্দুতে $y^2 = 4ax$ এর বক্রতা ব্যাসার্ধ (radius of curvature) বের কর।

৩। (ক) Cauchy-র mean value theorem-টি বিবৃত ও প্রমাণ কর।

(খ) যদি

$$f(x, y) = x \sin \frac{1}{y} + y \sin \frac{1}{x}, \text{ যখন } xy \neq 0 \\ = 0, \text{ যখন } xy = 0$$

তবে দেখাও যে $\lim_{(x, y) \rightarrow (0, 0)} f(x, y) = 0$.

৪। (ক) নিম্নলিখিত শ্রেণীটির অভিসারিত্ব পরীক্ষা কর :

$$x + \frac{11}{2}x^2 + \frac{21}{3}x^3 + \frac{31}{4}x^4 + \dots$$

(খ) $x^2 + y^2 = a^2$ বৃত্তের অন্তর্বর্তী বৃহত্তম আয়তক্ষেত্র নির্ণয় কর।

৫। (ক) $y = \frac{3x}{2} \log \left(e - \frac{1}{3x} \right)$ এর স্পর্শপ্রবণরেখা

(asymptote)-গুলো বের কর।

(খ) মান নির্ণয় কর :

$$\lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{\sin x}{x} \right)^{\frac{1}{x}}$$

(ক) $p = r \sin \theta$ সম্পর্কটি প্রতিষ্ঠা কর, যেখানে p, r ও θ প্রচলিত এবং এই সম্পর্কটি ব্যবহার করে $r = a(1 - \cos \theta)$ বক্রের pedal সমীকরণ বের কর।

(খ) যদি $y = 5 \log x$ হয়, তবে y_n নির্ণয় কর।

(ক) Leibnitz-এর তত্ত্বটি বিবৃত ও প্রমাণ কর।

(খ) $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ সম-অক্ষীয় উপবৃত্ত (family of coaxial ellipse)-গুলোর পরিম্পর্শক (envelope) নির্ণয় কর, যেখানে $a^3 + b^3 = c^3$.

বিভাগ-খ

যে-কোন একটি প্রশ্নের উত্তর দাও।

(ক) Analytic function-এর সংজ্ঞা দাও।

(খ) দেখাও যে $f(z) = z$ অপেক্ষকটি $(0, 0)$ বিন্দুতে সন্তত (continuous) কিন্তু অবকলনযোগ্য (differentiable) নয়।

(গ) দেখাও যে $u(x, y) = e^{x^2 - y^2} \cdot \cos 2xy$ একটি হার্মনিক অপেক্ষক (harmonic function). u এর হার্মনিক অনুবন্ধী (harmonic conjugate) বের কর।

७। (क) प्रमाण कर (य $f(z) = |z|^2$ अपेक्षकति सर्वत्र सल (continuous) किछु मुनविन् (origin) बा कोथाओ अवकननयोगा नय।

(ख) इलायक अपेक्षक (Harmonic function)-ए सखा दाओ। देखाओ ये u इलायक अपेक्षकति अवक सरीकरण $\frac{\partial^2 u}{\partial z \partial \bar{z}} = 0$ के सिद्ध करे।

(ग) देखाओ ये analytic function-एर राखव अपेक्षक Laplace-एर सरीकरणति सिद्ध करे।

[NEPALI VERSION]

समूह—क

प्रश्न नं० १ अनि रहलबाट कुनै चारवटा प्रश्नका उत्तर देऊ।

२×४=८

कुनै चारवटा प्रश्नका उत्तर देऊ :

(क) अनुक्रमको सीमाको परिभाषा लेख।

(ख) वक्र $x^3 + y^3 = 3axy$ को अनन्त-स्पर्शकहरू निर्णय गर।

(ग) प्रमाण गर

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin^2 x}{x^2} = 1$$

(घ) एउटा यस्तो फलनको उदाहरण देऊ जो एउटा बिन्दुमा निरन्तर छ तर त्यस बिन्दुमा अवकलनीय छैन।

(ङ) श्रेणीक्रम $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{n+1}$ अभिकेन्द्रित छैन भनी प्रमाण गर।

(च) यदि $u = f\left(\frac{y}{x}\right)$ भए $x \frac{\partial u}{\partial x} + y \frac{\partial u}{\partial y} = 0$ भनी प्रमाण गर।

(क) Cauchy-को अभिकेन्द्रको साधारण सिद्धान्त (general principle) उल्लेख अनि प्रमाण गर। ५

(ख) $y^2 = 4ax$ को मूलबिन्दुमा वक्रताको व्यासार्ध (radius of curvature) निर्णय गर। ३

३. (क) Cauchy-को mean value उपपाद्य उल्लेख अनि प्रमाण गर।

(ख) यदि

$$f(x, y) = x \sin \frac{1}{y} + y \sin \frac{1}{x}, \text{ जब } xy \neq 0$$

$$= 0$$

भए $\lim_{(x, y) \rightarrow (0, 0)} f(x, y) = 0$ हुन्छ भनी प्रमाण गर।

४. (क) श्रेणीक्रम

$$x + \frac{1!}{2^2} x^2 + \frac{2!}{3^3} x^3 + \frac{3!}{4^4} x^4 + \dots$$

को अभिकेन्द्रनको जाँच गर।

- (ख) वृत्त $x^2 + y^2 = a^2$ भित्र कोरिने सबभन्दा ठूलो समकोणीय चतुर्भुज निर्णय गर।

५. (क) $y = \frac{3x}{2} \log \left(e - \frac{1}{3x} \right)$ को अनन्त-स्पर्शहरू निर्णय गर।

(ख) मान निर्णय गर :

$$\lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{\sin x}{x} \right)^{\frac{1}{x^2}}$$

६. (क) सम्बन्ध $p = r \sin \phi$ आर्जन गर, जहाँ p, r अनि ϕ प्रचलित अर्थमा छन् अनि यसलाई व्यवहार गरेर वक्र $r = a(1 - \cos \theta)$ को पदिक समीकरण (pedal equation) निर्णय गर।

- (ख) यदि $y = 5 \log x$ भए y_n निर्णय गर।

MR7/333

- (क) Leibnitz-को उपपाद्य उल्लेख अनि प्रमाण गर।

- (ग) $a^3 + b^3 = c^3$ शर्त पालन गर्ने सम-अक्षीय (coaxial)

- अण्डवृत्तसमूह $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ को परिस्पर्शक निर्णय गर।

समूह—ख

कुनै एक प्रश्नका उत्तर देऊ।

- (क) Analytic फलनको परिभाषा देऊ।

- (ख) बिन्दु $(0, 0)$ मा $f(z) = \bar{z}$ निरन्तर छ तर अवकलनीय छैन भनी प्रमाण गर।

- (ग) $u(x, y) = e^{x^2 - y^2} \cdot \cos 2xy$ एउटा harmonic फलन हुन् भनी प्रमाण गर। u को harmonic conjugate निर्णय गर।

- (क) फलन $f(z) = |z|^2$ सबै बिन्दुमा निरन्तर छ तर मूलबिन्दु छोडी कतै पनि अवकलनीय छैन भनी प्रमाण गर।

- (ख) Harmonic फलनको परिभाषा देऊ। Harmonic फलन u ले अवकलनीय समीकरण $\frac{\partial^2 u}{\partial z \partial \bar{z}} = 0$ पूर्ति गर्छ भनी प्रमाण गर।

- (ग) Analytic फलनको साँचो भाग (real part) ले Laplace-को समीकरणलाई पूर्ति गर्छ भनी प्रमाण गर।

B I (Three Year G)
Under 1+1+1 System

2016

MATHEMATICS (General)

FIRST PAPER

(Syllabus—2015)

Time : 2 hours

Full Marks : 50

The figures in the margin indicate full marks.

GROUP—A

Answer Question No. 1 and any two from the rest.

1. (a) Find amp z , where $z = \frac{1 + \sqrt{3}i}{1 + i}$. 2
- (b) Show that $(x^2 + x + 1)$ is a factor of $x^{14} + x^7 + 1$. 2
- (c) Find the remainder when $2x^5 + x^4 + 2x^3 + x^2 + 4x + 3$ is divided by $2x + 1$. 1
2. (a) Prove that the sum of the 99th powers of all the roots of $x^7 - 1 = 0$ is zero. 4

RM16/324

(Turn Over)

(2)

- (b) Solve the equations $x + y + z = 8$, $x - y + 2z = 6$ and $3x + 5y - 7z = 14$ by matrix method.

3. (a) Prove that

$$\begin{vmatrix} (b+c)^2 & a^2 & a^2 \\ b^2 & (c+a)^2 & b^2 \\ c^2 & c^2 & (a+b)^2 \end{vmatrix} = 2abc(a+b+c)$$

- (b) If α, β, γ be the roots of the equation $x^3 - px^2 + qx - r = 0$

then find the equation whose roots are

$$\frac{1}{\beta} + \frac{1}{\gamma}, \frac{1}{\gamma} + \frac{1}{\alpha}, \frac{1}{\alpha} + \frac{1}{\beta}$$

4. (a) Solve the following equation by Cardan's method :

$$x^3 - 12x + 65 = 0$$

- (b) If $x + iy = a \cos(u + iv) + ib \sin(u + iv)$, then show that $\frac{x^2}{\cos^2 u} - \frac{y^2}{\sin^2 u} = a^2 - b^2$.

5. (a) Find the rank of the matrix

$$\begin{pmatrix} 5 & 3 & 14 & 4 \\ 0 & 1 & 2 & 1 \\ 1 & -1 & 2 & 0 \end{pmatrix}$$

RM16/324

(Continued)

(3)

- (b) If α, β, γ be the roots of the cubic equation $x^3 + px^2 + qx + r = 0$, then find the value of $\Sigma \alpha^2 \beta$.

GROUP—B

Answer Question No. 6 and any two from the rest.

- (a) Show that $(A - B)$ and $(A \cap B)$ are disjoint sets.

- (b) Define binary relation.

- (c) If $a, b, c \in$ the ring $(R, +, \cdot)$, then show that $(-a) \cdot (-b) = a \cdot b$.

- (a) If A and B be two non-empty sets, then prove that

$$A \cup B = (A - B) \cup B$$

- (b) Show that the set $\mathbb{Z}$ of all integers forms a group under the binary operation $*$ defined by $a * b = a + b + 1, a, b \in \mathbb{Z}$.

- (a) Prove that the inverse of the product of two elements in a group $(G, *)$ is the product of the inverses in the reverse order.

(Turn Over)

(4)

- (b) Show that the set of matrices of the form $\begin{pmatrix} a & b \\ 0 & c \end{pmatrix}$ is a subring of all 2×2 matrices over the set of real numbers.

9. (a) Examine whether the quadratic

$$5x^2 + y^2 + 5z^2 + 4xy - 8xz - 4yz$$

is positive definite or not.

- (b) Show that the set of vectors

$$S = \{1, 1 + x, 1 + x + x^2\}$$

is a basis for V_3 over R .

10. (a) Show that the mapping f of $R \rightarrow R$, where R the set of real numbers, where $f(x) = 2x + 3$, $x \in R$ is bijective mapping.

- (b) Show that the set of numbers of the form $a + b\sqrt{2}$ with a and b as rational numbers is a field under addition and multiplication.

RM16/324

(Continue)

(5)

[BENGALI VERSION]

বিভাগ-ক

১নং প্রশ্ন এবং অন্য যে কোনো দুটি প্রশ্নের উত্তর দাও।

- (ক) $\arg z$ বের কর, যখন $z = \frac{1 + \sqrt{3}i}{1 + i}$.

- (গ) দেখাও যে $x^{14} + x^7 + 1$ -এর একটি উৎপাদক $(x^2 + x + 1)$.

- (গ) $2x^5 + x^4 + 2x^3 + x^2 + 4x + 3$ -কে $2x + 1$ দিয়ে ভাগ করলে কত ভাগশেষ থাকে?

- (ক) প্রমাণ কর $x^7 - 1 = 0$ সমীকরণের সকল বীজের ৯৯তম ঘাতের যোগফল শূন্য।

- (খ) ম্যাট্রিক্স পদ্ধতিতে নিম্নের সমীকরণগুলি সমাধান কর :
 $x + y + z = 8$, $x - y + 2z = 6$, $3x + 5y - 7z = 14$

- (ক) প্রমাণ কর

$$\begin{vmatrix} (b+c)^2 & a^2 & a^2 \\ b^2 & (c+a)^2 & b^2 \\ c^2 & c^2 & (a+b)^2 \end{vmatrix} = 2abc(a+b+c)^3$$

(Turn Over)

- (খ) $x^3 - px^2 + qx - r = 0$ সমীকরণের তিনটি বীজ যদি α, β, γ হয়, তবে যে সমীকরণের বীজগুলি

$$\frac{1}{\beta} + \frac{1}{\gamma}, \frac{1}{\gamma} + \frac{1}{\alpha}, \frac{1}{\alpha} + \frac{1}{\beta}$$

তা নির্ণয় কর।

- ৪। (ক) নিম্নের সমীকরণটি কার্ডানের (Cardan's) পদ্ধতিতে সমাধান কর :

$$x^3 - 12x + 65 = 0$$

- (খ) যদি $x + iy = a \cos(u + iv) + ib \sin(u + iv)$ হয়, তবে দেখাও যে

$$\frac{x^2}{\cos^2 u} - \frac{y^2}{\sin^2 u} = a^2 - b^2$$

- ৫। (ক) প্রদত্ত ম্যাট্রিক্সটির র্যাঙ্ক (rank) নির্ণয় কর :

$$\begin{pmatrix} 5 & 3 & 14 & 4 \\ 0 & 1 & 2 & 1 \\ 1 & -1 & 2 & 0 \end{pmatrix}$$

- (খ) যদি $x^3 + px^2 + qx + r = 0$ -এর বীজত্রয় α, β, γ হয়, তবে $\Sigma \alpha^2 \beta$ -এর মান নির্ণয় কর।

বিভাগ-খ

উনং প্রশ্ন এবং অন্য যে কোনো দুটি প্রশ্নের উত্তর দাও।

- ১। (ক) দেখাও যে $(A - B)$ এবং $(A \cap B)$ সেট দুটি অসংযুক্ত সেট (disjoint set)।

- (খ) দ্বিপদ সম্পর্ক (binary relation)-এর সংজ্ঞা দাও।

- (গ) যদি $a, b, c \in$ the ring $(R, +, \cdot)$ হয়, তবে দেখাও যে $(-a) \cdot (-b) = a \cdot b$ ।

- ২। (ক) যদি A এবং B দুটি অশূন্য সেট হয়, তবে দেখাও যে

$$A \cup B = (A - B) \cup B$$

- (খ) দেখাও যে, সকল পূর্ণ সংখ্যার সেট $\mathbb{Z}$ দ্বিপদ প্রক্রিয়া $*$ -এর অধীন (under binary operation $*$) একটি গ্রুপ তৈরী করে যেখানে $a * b = a + b + 1$, $a, b \in \mathbb{Z}$ ।

- ৩। (ক) প্রমাণ কর একটি গ্রুপ $(G, *)$ -এর

$$(a * b)^{-1} = b^{-1} * a^{-1}$$

যখন $a, b \in G$ ।

- (খ) দেখাও যে, বাস্তব সংখ্যায় সেট-এর উপর $\begin{pmatrix} a & b \\ 0 & c \end{pmatrix}$

আকারের সমস্ত ম্যাট্রিক্স 2×2 ম্যাট্রিক্স-এর subring গঠন করে।

- ৯। (ক) $5x^2 + y^2 + 5z^2 + 4xy - 8xz - 4yz$
quadratic-টি positive definite কিনা পরীক্ষা
কর।

(খ) দেখাও যে

$$S = \{1, 1 + x, 1 + x + x^2\}$$

ভেক্টরের সেটটি R -এর উপর V_3 -এর একটি বেসিস।

- ১০। (ক) দেখাও যে য্যাপিং f যখন $f(x) = 2x + 3$, $x \in R$
একটি bijective mapping $R \rightarrow R$, R বাস্তব
সংখ্যার সেট।

(খ) প্রমাণ কর $a + b\sqrt{2}$ আকারের সংখ্যার সেট যোগ ও
গুণ প্রক্রিয়ার অধীনে একটি ক্ষেত্র (field) গঠন করে
যেখানে a, b মূলদ সংখ্যা।

[NEPALI VERSION]

সমূহ—ক

প্রশ্ন নং ১ অনি রহলবাট কুনৈ দুইবটা প্রশ্নকা উত্তর দেऊ।

১. (ক) $z = \frac{1 + \sqrt{3}i}{1 + i}$ भए amp z को मान निर्णय गर। २

(ख) $x^{14} + x^7 + 1$ को $(x^2 + x + 1)$ एउटा गुणखण्ड हो
भनी प्रमाण गर। २

(ग) $2x^5 + x^4 + 2x^3 + x^2 + 4x + 3$ लाई $2x + 1$
ले भाग गर्दा पाइने रहल निर्णय गर। १

२. (क) $x^7 - 1 = 0$ को सबै मूलहरूको 99th घात
(powers) को योगफल शून्य हुन्छ भनी प्रमाण गर। ४

(ख) मेट्रिक्स पद्धतिद्वारा समीकरण समूह $x + y + z = 8$,
 $x - y + 2z = 6$, $3x + 5y - 7z = 14$ को समाधान
निर्णय गर। ६

३. (क) प्रमाण गर

$$\begin{vmatrix} (b+c)^2 & a^2 & a^2 \\ b^2 & (c+a)^2 & b^2 \\ c^2 & c^2 & (a+b)^2 \end{vmatrix} = 2abc(a+b+c)^3$$

४

- (ख) यदि α, β, γ समीकरण $x^3 - px^2 + qx - r = 0$ को मूलहरू भए त्यो समीकरण निर्णय गर जसको मूलहरू

$$\frac{1}{\beta} + \frac{1}{\gamma}, \frac{1}{\gamma} + \frac{1}{\alpha}, \frac{1}{\alpha} + \frac{1}{\beta}$$

हुन्।

४. (क) Cardan को पद्धतिद्वारा $x^3 - 12x + 65 = 0$ को समाधान गर।

- (ख) यदि $x + iy = a \cos(u + iv) + ib \sin(u + iv)$ भए प्रमाण गर

$$\frac{x^2}{\cos^2 u} - \frac{y^2}{\sin^2 u} = a^2 - b^2$$

५. (क) मेट्रिक्स

$$\begin{pmatrix} 5 & 3 & 14 & 4 \\ 0 & 1 & 2 & 1 \\ 1 & -1 & 2 & 0 \end{pmatrix}$$

को क्रम (rank) निर्णय गर।

- (ख) घनाकार समीकरण $x^3 + px^2 + qx + r = 0$ को मूलहरू α, β, γ भए $\Sigma \alpha^2 \beta$ को मान निर्णय गर।

समूह—ख

प्रश्न नं० ६ अनि रहलबाट कुनै दुईवटा प्रश्नका उत्तर देऊ।

६. (क) $(A - B)$ अनि $(A \cap B)$ disjoint सेटहरू हुन् भनी प्रमाण गर। २
- (ख) द्विक सम्बन्ध (binary relation) को परिभाषा देऊ। १
- (ग) यदि $(R, +, \cdot)$ एउटा रिङ भए अनि $a, b, c \in R$ भए प्रमाण गर २
- $(-a) \cdot (-b) = a \cdot b$ २

७. (क) यदि A अनि B अरिक्त सेटहरू भए प्रमाण गर

$$A \cup B = (A - B) \cup B$$

- (ख) समस्त पूर्णसंख्याहरूको सेट $\mathbb{Z}$ माथि $a * b = a + b + 1, a, b \in \mathbb{Z}$ ले एउटा द्विक प्रक्रिया लाई परिभाषित गर्छ भने $(\mathbb{Z}, *)$ एउटा समूह (group) हुन्छ भनी प्रमाण गर। ६

८. (क) एउटा समूह $(G, *)$ मा प्रमाण गर

$$(a * b)^{-1} = b^{-1} * a^{-1}, a, b \in G$$

- (ख) वास्तविक संख्याहरूको सेटमाथि $\begin{pmatrix} a & b \\ 0 & c \end{pmatrix}$ रूप भएको मेट्रिक्सहरूको सेट समस्त 2×2 मेट्रिक्सहरूको एउटा उप-रिङ हुन्छ भनी प्रमाण गर। ६

१. (क) द्विघात रूप

$$5x^2 + y^2 + 5z^2 + 4xy - 8xz - 4yz$$

positive definite हो वा होइन जाँच गर।

(ख) सदिशहरूको सेट $S = \{1, 1+x, 1+x+x^2\}$,
 R माथि V_3 को आधार हो भनी प्रमाण गर।१०. (क) $f(x) = 2x + 3$, $x \in R$ ले परिभाषित गर्ने mapping
 $f: R \rightarrow R$ एउटा bijective mapping हो भनी
प्रमाण गर (R वास्तविक संख्याहरूको सेट हो)।(ख) a अनि b परिमेय (rational) संख्याहरू भए
 $a + b\sqrt{2}$ रूप भएको समस्त संख्याहरूको सेटले योगफल
अनि गुणनफलसँग एउटा field बनाउँछ भनी प्रमाण गर।

★ ★ ★

2016

MATHEMATICS (General)

SECOND PAPER

(Syllabus—2015)

Full Marks : 50

Time : 2 hours

The figures in the margin indicate full marks.

GROUP—A

Answer Question No. 1 and any three from the rest.

2×4=8

1. Answer any four questions :

(a) Transform to axes inclined at 45° to the
original axes, the equation $x^2 - y^2 = a^2$.(b) Find the length of the tangent to
 $5x^2 + 5y^2 + 8x + 7y - 10 = 0$ from the
point $(-1, 2)$.(c) Find the pole of the line
 $5x - 4y - 14 = 0$ with respect to
 $x^2 + y^2 + 6x - 10y - 15 = 0$.(d) If e and e' be the eccentricities of a
hyperbola and its conjugate respectively,
then prove that $\frac{1}{e^2} + \frac{1}{e'^2} = 1$.

- (e) Show that the equation

$$8x^2 + 10xy + 3y^2 + 26x + 16y + 21 = 0$$

represents two intersecting straight lines and find the angle between them.

- (f) Show that the plane $2x - 2y + z + 12 = 0$ touches the sphere

$$x^2 + y^2 + z^2 - 2x - 4y + 2z - 3 = 0$$

and find the point of contact.

2. (a) If one of the straight lines of $ax^2 + 2hxy + by^2 = 0$ coincides with one of the straight lines of $a'x^2 + 2h'xy + b'y^2 = 0$ and the remaining lines are at right angles, then show that

$$h\left(\frac{1}{b} - \frac{1}{a}\right) = h'\left(\frac{1}{b'} - \frac{1}{a'}\right)$$

- (b) Prove that the straight line $lx + my + n = 0$ touches the hyperbola $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$ if $n^2 = a^2l^2 - b^2m^2$.

3. (a) Discuss the nature of the conic $4x^2 - 4xy + y^2 + 2x - 26y + 9 = 0$ and hence reduce it to its canonical form.

- (b) Find the direction cosines of two straight lines which are connected by the relations $l + m + n = 0$ and $2lm - mn + 2nl = 0$. Hence find the acute angle between the lines.

- (a) Show that the equation of the tangent to the conic $\frac{l}{r} = 1 + e \cos \theta$ parallel to the tangent at $\theta = \alpha$ is given by

$$l(e^2 + 2e \cos \alpha + 1) = r(e^2 - 1)\{\cos(\theta - \alpha) + e \cos \theta\}$$

- (b) Show that the equation of the plane through the points $(2, 1, -4)$, $(3, 2, -2)$ and perpendicular to the plane $2x - 5y + 3z + 12 = 0$ is

$$13x + y - 7z - 55 = 0$$

- (a) Find the shortest distance and the equation of the line of shortest distance between the lines

$$\frac{x-1}{3} = \frac{y+1}{2} = \frac{z-2}{2} \quad \text{and}$$

$$2x - 3y - 4z + 6 = 0 = x - 2y + z - 3$$

- (b) A sphere of radius k passes through the origin and meets the axes in A, B, C . Prove that the locus of the centroid of the triangle ABC is the sphere

$$9(x^2 + y^2 + z^2) = 4k^2$$

(4)

6. (a) Find the locus of the poles of the chords of an ellipse $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ which subtend right angles at the centre.

- (b) Show that the surface generated by a straight line which meets the straight lines $y = mx$, $z = c$ and $y = -mx$, $z = -c$ at the same angle is $mcx = yz$.

GROUP—B

7. (a) If $\vec{a}$ and $\vec{b}$ be two mutually perpendicular vectors, then show that $|\vec{a} \times \vec{b}| = |\vec{a}| |\vec{b}|$

- (b) Test the collinearity of the three vectors $\vec{a} = \hat{i} - 2\hat{j} + 3\hat{k}$, $\vec{b} = 2\hat{i} + 3\hat{j} - 4\hat{k}$ and $\vec{c} = -2\hat{i} + \hat{j}$.

8. Answer any **two** questions :

3×2=

- (a) Show that

$$\vec{a} \times (\vec{b} \times \vec{c}) + \vec{b} \times (\vec{c} \times \vec{a}) + \vec{c} \times (\vec{a} \times \vec{b}) = \vec{0}$$

- (b) Find the equation of the plane through the points $A(-1, 1, 2)$, $B(1, -2, 1)$ and $C(2, 2, 4)$.

RM16/325

(Continued)

(5)

- (c) If $\vec{\alpha}$ and $\vec{\beta}$ be two unit vectors and θ be the angle between them, then show that

$$2 \sin \frac{\theta}{2} = |\vec{\alpha} - \vec{\beta}|$$

6

9. Answer any **one** question :

- (a) Prove by vector method that

$$\cos(\alpha + \beta) = \cos \alpha \cos \beta - \sin \alpha \sin \beta$$

- (b) Show by vector method that the perpendicular bisectors of the sides of a triangle are concurrent.

RM16/325

(Turn Over)

[BENGALI VERSION]

বিভাগ-ক

১নং প্রশ্ন এবং আরও যে-কোন তিনটি প্রশ্নের উত্তর দাও।

১। যে-কোন চারটি প্রশ্নের উত্তর দাও :

(ক) অক্ষদ্বয়ের 45° ঘূর্ণন হলে $x^2 - y^2 = a^2$ সমীকরণের রূপান্তরিত (transformed) সমীকরণ নির্ণয় করো।

(খ) $(-1, 2)$ বিন্দু থেকে $5x^2 + 5y^2 + 8x + 7y - 10 = 0$ বক্রে অঙ্কিত স্পর্শকের দৈর্ঘ্য নির্ণয় করো।

(গ) $x^2 + y^2 + 6x - 10y - 15 = 0$ বৃত্ত সাপেক্ষে $5x - 4y - 14 = 0$ সরলরেখার মেরু (pole) নির্ণয় করো।

(ঘ) কোন পরাবৃত্ত ও তার অনুবর্তী পরাবৃত্তের উৎকেন্দ্রতা যথাক্রমে e ও e' হলে, প্রমাণ করো যে

$$\frac{1}{e^2} + \frac{1}{e'^2} = 1$$

(ঙ) দেখাও যে

$$8x^2 + 10xy + 3y^2 + 26x + 16y + 21 = 0$$

সমীকরণ একটি পরস্পরছেদী যুগ্ম সরলরেখাকে (pair of intersecting straight lines) নির্দেশ করে।
এই সরলরেখাদ্বয়ের যথাবর্তী কোণ নির্ণয় করো।

(৬) দেখাও যে $2x - 2y + z + 12 = 0$ সমতল

$$x^2 + y^2 + z^2 - 2x - 4y + 2z - 3 = 0$$

গোলককে স্পর্শ করে। স্পর্শ বিন্দুটি নির্ণয় করো।

(ক) যদি $ax^2 + 2hxy + by^2 = 0$ -এর একটি সরলরেখা $a'x^2 + 2h'xy + b'y^2 = 0$ -এর একটি সরলরেখার সাথে সমাপতিত হয় এবং বাকী সরলরেখাদ্বয় পরস্পর সমকোণে থাকে, তবে দেখাও যে

$$h\left(\frac{1}{b} - \frac{1}{a}\right) = h'\left(\frac{1}{b'} - \frac{1}{a'}\right)$$

(খ) প্রমাণ করো যে $lx + my + n = 0$ সরলরেখা

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$$
 পরাবৃত্তকে স্পর্শ করবে যদি

$$n^2 = a^2 l^2 - b^2 m^2$$
 হয়।

(ক) $4x^2 - 4xy + y^2 + 2x - 26y + 9 = 0$ সমীকরণটির প্রকৃতি (nature of the conic) বর্ণনা করো এবং সমীকরণটিকে আদর্শ আকারে (canonical form) প্রকাশ করো।

(খ) $l + m + n = 0$ এবং $2lm - mn + 2nl = 0$ সম্পর্কে আবদ্ধ দুটি সরলরেখার দিকঙ্ক গোষ্ঠি (direction cosines) নির্ণয় করো। অতঃপর সরলরেখাদুটির যথাবর্তী সূক্ষ্মকোণ নির্ণয় করো।

- ৪। (ক) দেখাও যে $\frac{l}{r} = 1 + e \cos \theta$ শঙ্কুচ্ছেদ (conic)-এর স্পর্শকের সমীকরণ যা $\theta = \alpha$ বিন্দুতে স্পর্শকের সমান্তরাল তা হলো

$$l(e^2 + 2e \cos \alpha + 1) = r(e^2 - 1)(\cos(\theta - \alpha) + e \cos \theta)$$

- (খ) দেখাও যে (2, 1, -4) ও (3, 2, -2) বিন্দুগামী কোন সমতল যা $2x - 5y + 3z + 12 = 0$ সমতলের উপর লম্ব তার সমীকরণ হবে $13x + y - 7z - 55 = 0$.

৫। (ক) $\frac{x-1}{3} = \frac{y+1}{2} = \frac{z-2}{2}$ ও

$$2x - 3y - 4z + 6 = 0 = x - 2y + z - 3$$

সরলরেখাদুটির মধ্যবর্তী ক্ষুদ্রতম দূরত্ব নির্ণয় করো এবং ক্ষুদ্রতম দূরত্বে অবস্থিত রেখার সমীকরণ নির্ণয় করো।

- (খ) মূলবিন্দুগামী k ব্যাসার্ধের কোন গোলক স্থানাঙ্ক অক্ষত্রয়-কে A, B, C বিন্দুতে ছেদ করে। প্রমাণ করো যে ত্রিভুজ ABC -এর ভরকেন্দ্রের সঞ্চারণপথের সমীকরণ $9(x^2 + y^2 + z^2) = 4k^2$.

- ৬। (ক) $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ উপবৃত্তের যে সব জ্যা (chords) ঐ উপবৃত্তের কেন্দ্রে সমকোণ উৎপন্ন করে তাদের মেরুগুলির (poles) সঞ্চারণপথ নির্ণয় করো।

- (খ) দেখাও যে একটি সরলরেখা দ্বারা তৈরী তল (surface generated)-এর সমীকরণ $mcx = yz$
 $y = mx, z = c$ ও $y = -mx, z = -c$
 সরলরেখাদুটিতে একই কোণে মিলিত হয়।

8

বিভাগ-খ

- (ক) $\vec{a}$ ও $\vec{b}$ দুটি পরস্পর সমকোণী ভেক্টর হলে প্রমাণ করো যে

$$|\vec{a} \times \vec{b}| = |\vec{a}| |\vec{b}|$$

- (খ) $\vec{a} = \hat{i} - 2\hat{j} + 3\hat{k}, \vec{b} = 2\hat{i} + 3\hat{j} - 4\hat{k}$ এবং
 $\vec{c} = -2\hat{i} + \hat{j}$ তিনটি ভেক্টরের সমরেখতা পরীক্ষা করো।

- (গ) যে-কোন দুটি প্রস্থের উত্তর দাও :

- (ক) দেখাও যে

$$\vec{a} \times (\vec{b} \times \vec{c}) + \vec{b} \times (\vec{c} \times \vec{a}) + \vec{c} \times (\vec{a} \times \vec{b}) = \vec{0}$$

- (খ) $A(-1, 1, 2), B(1, -2, 1)$ ও $C(2, 2, 4)$ বিন্দুগামী সমতলের সমীকরণ নির্ণয় করো।

- (গ) $\vec{\alpha}$ ও $\vec{\beta}$ দুটি একক ভেক্টর এবং θ তাদের মধ্যবর্তী কোণ হলে দেখাও যে

$$2 \sin \frac{\theta}{2} = |\vec{\alpha} - \vec{\beta}|$$

७। ये-कोन एकटि प्रश्नर उत्तर दाउ :

(क) डेस्ट्र पद्धतिडे प्रमाण करु ये

$$\cos(\alpha + \beta) = \cos\alpha \cos\beta - \sin\alpha \sin\beta$$

(ख) डेस्ट्र पद्धतिडे प्रमाण करु ये, कोन बिडुकेन बाहुगुनिर नय समद्विखण्डकत्रय समबिन्दु।

[NEPALI VERSION]

समूह—क

प्रश्न नं० १ अनि रहलबाट कुनै तीनवटा प्रश्नका उत्तर देऊ।

२×४=८

१। चारवटा प्रश्नका उत्तर देऊ :

(क) अक्षहरूसँग 45° कोण बनाउने रेखाहरूमा अक्षहरूलाई विस्थापित गरे $x^2 - y^2 = a^2$ को परिवर्तित रूप लेख।

(ख) बिन्दु $(-1, 2)$ देखि $5x^2 + 5y^2 + 8x + 7y - 10 = 0$ को स्पर्शकको लमाइ निर्णय गर।

(ग) $x^2 + y^2 + 6x - 10y - 15 = 0$ को सापेक्षमा रेखा $5x - 4y - 14 = 0$ को ध्रुव निर्णय गर।

(घ) यदि e अनि e' एउटा अतिपवलय र त्यसको conjugate को सनकहरू (eccentricities) भए प्रमाण गर

$$\frac{1}{e^2} + \frac{1}{e'^2} = 1$$

(ङ) $8x^2 + 10xy + 3y^2 + 26x + 16y + 21 = 0$ ले एका-अर्कोलाई प्रतिच्छेद गर्ने रेखाहरू दिन्छ भनी प्रमाण गर अनि ती रेखाहरूमाझको कोण निर्णय गर।

(च) समतल $2x - 2y + z + 12 = 0$ ले गोलाकार

$$x^2 + y^2 + z^2 - 2x - 4y + 2z - 3 = 0$$

लाई छुन्छ भनी प्रमाण गर अनि त्यो एका-अर्कालाई छु बिन्दु निर्णय गर।

२. (क) $ax^2 + 2hxy + by^2 = 0$ को एउटा रेखा
 $a'x^2 + 2h'xy + b'y^2 = 0$ को एउटा रेखासँग समा
 भए अनि तिनीहरूको अरू रेखाहरू लम्ब भए प्रमाण गर

$$h\left(\frac{1}{b} - \frac{1}{a}\right) = h'\left(\frac{1}{b'} - \frac{1}{a'}\right)$$

(ख) यदि $n^2 = a^2l^2 - b^2m^2$ भए रेखा
 $lx + my + n = 0$ ले अतिपरवलय $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$ लाई
 छुन्छ भनी प्रमाण गर।

३. (क) शाङ्खव $4x^2 - 4xy + y^2 + 2x - 26y + 9 = 0$ को
 प्रकृति उद्घेख गर अनि यसलाई मानक रूपमा लघुकृत गर।

(ख) दुईवटा रेखाहरूको direction cosines यदि
 $l + m + n = 0$ अनि $2lm - mn + 2nl = 0$ ले दिन्छ
 भने direction cosines निर्णय गर अनि ती
 रेखाहरू-माझको न्यून (acute) कोण निर्णय गर।

(क) शाङ्खव $\frac{l}{r} = 1 + e \cos \theta$ को $\theta = \alpha$ मा कोरिने

परार्श्वसँग समानान्तर हुने स्पर्शको समीकरण

$$l(e^2 + 2e \cos \alpha + 1) = r(e^2 - 1)(\cos(\theta - \alpha) + e \cos \theta)$$

हुन्छ भनी प्रमाण गर।

(ख) $(2, 1, -4)$, $(3, 2, -2)$ बिन्दुहरूबाट पार हुने अनि
 समतल $2x - 5y + 3z + 12 = 0$ सँग लम्ब हुने
 समतलको समीकरण $13x + y - 7z - 55 = 0$ हुन्छ
 भनी प्रमाण गर।

(क) रेखाहरू

$$\frac{x-1}{3} = \frac{y+1}{2} = \frac{z-2}{2}$$
 अनि

$$2x - 3y - 4z + 6 = 0 = x - 2y + z - 3$$

माझको सबभन्दा सानो दूत्व अनि त्यो दूत्वको रेखाको
 समीकरण निर्णय गर।

(ख) k व्यासार्ध भएको एउटा गोलाकार मूलबिन्दुबाट पार हुन्छ
 अनि अक्षहरूलाई A , B , C मा प्रतिच्छेदन गर्छ भने
 $\triangle ABC$ को केन्द्रक (centroid) को बिन्दुपथ
 (locus) गोलाकार $9(x^2 + y^2 + z^2) = 4k^2$ हुन्छ
 भनी प्रमाण गर।

(क) अण्डवृत्त $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ को केन्द्रमा समकोण बनाउने

ज्याहरूको ध्रुवहरूको बिन्दुपथ (locus) निर्णय गर।

- (ख) रेखाहरू $y = mx$, $z = c$ अनि $y = -mx$, $z = -c$ लाई एउटै कोणमा प्रतिच्छेद गर्ने रेखातले उत्पन्न गरेका धरातल $mcx = yz$ हो भनी प्रमाण गर।

समूह-ख

७. (क) सदिश $\vec{a}$ अनि $\vec{b}$ एका-अर्कासँग लम्ब भए प्रमाण गर

$$|\vec{a} \times \vec{b}| = |\vec{a}| |\vec{b}|$$

- (ख) तीन सदिशहरू $\vec{a} = \hat{i} - 2\hat{j} + 3\hat{k}$, $\vec{b} = 2\hat{i} + 3\hat{j} - 4\hat{k}$ अनि $\vec{c} = -2\hat{i} + \hat{j}$ एउटै रेखामा छन् भनी जाँच गर।

८. कुनै दुईवटा प्रश्नका उत्तर देऊ :

(क) प्रमाण गर :

$$\vec{a} \times (\vec{b} \times \vec{c}) + \vec{b} \times (\vec{c} \times \vec{a}) + \vec{c} \times (\vec{a} \times \vec{b}) = \vec{0}$$

- (ख) बिन्दुहरू $A(-1, 1, 2)$, $B(1, -2, 1)$ अनि $C(2, 2, 4)$ बाट पार हुने समतलको समीकरण निर्णय गर।

- (ग) $\vec{\alpha}$ अनि $\vec{\beta}$ दुईवटा एकाई सदिशहरू भए अनि θ चौहानि तिनीहरू-माझको कोण भए प्रमाण गर

$$2 \sin \frac{\theta}{2} = |\vec{\alpha} - \vec{\beta}|$$

१. एउटा प्रश्नका उत्तर देऊ :

- (क) सदिश पद्धतिद्वारा प्रमाण गर

$$\cos(\alpha + \beta) = \cos \alpha \cos \beta - \sin \alpha \sin \beta$$

- (ख) एउटा त्रिकोणको भुजाहरूको लम्ब समद्विभाजकहरू समवर्ती (concurrent) हुन्छ भनी सदिश पद्धतिद्वारा प्रमाण गर।

★★★

B I (Three Year G)
Under 1+1+1 System

2016

MATHEMATICS (General)

THIRD PAPER

(Syllabus—2015)

3 hours

Full Marks : 50

The figures in the margin indicate full marks.

GROUP—A

Answer Question No. 1 and any four from the rest.

Answer any **four** questions : $2 \times 4 = 8$

- (a) Find the pedal equation of the curve
 $r = a(1 + \cos \theta)$.

(b) If

$$u = f\left(\frac{y}{x}\right)$$

then show that

$$x \frac{\partial u}{\partial x} + y \frac{\partial u}{\partial y} = 0$$

- (c) Prove that the sequence

$$\left\{ \frac{3n+1}{n+2} \right\}$$

is bounded.

- (d) Using L'Hospital rule, show that

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin^2 x}{x^2} = 1$$

- (e) If $u = x^y$, then prove that

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 u}{\partial y \partial x}$$

- (f) Define limit points of a non-empty set.
Find the limit point of a set $\mathbb{Z}$.

2. (a) If

$$y = \frac{\sin^{-1} x}{\sqrt{1-x^2}}, \quad |x| < 1$$

then show that

$$(1-x^2)y_{n+2} - (2n+3)xy_{n+1} - (n+1)^2y_n = 0$$

- (b) Show that the sequence

$$\left\{ \left(1 + \frac{1}{n} \right)^{n+1} \right\}$$

is monotonic and has limit e .

3. (a) State and prove Lagrange's mean value theorem.

- (b) Examine the convergence of the series

$$1 + \frac{1}{1!} + \frac{2^2}{2!} + \frac{3^3}{3!} + \dots$$

4. (a) If

$$u = \sin^{-1} \left(\frac{x^2 + y^2}{x + y} \right)$$

then show that

$$x \frac{\partial u}{\partial x} + y \frac{\partial u}{\partial y} = \tan u$$

(b) If

$$f(x, y) = \begin{cases} xy \frac{x^2 - y^2}{x^2 + y^2}, & \text{when } (x, y) \neq (0, 0) \\ 0, & \text{when } (x, y) = (0, 0) \end{cases}$$

then show that $f_{xy}(0, 0) \neq f_{yx}(0, 0)$.

- (a) Find the value of x for which $2x^3 - 21x^2 + 36x - 20$ is maximum or minimum. Also find the maximum and minimum values of the expression.

- (b) Find the envelope of the family of straight lines $A\alpha^2 + B\alpha + C = 0$, where α is the variable parameter and A, B, C are linear functions of x, y .

- (a) Find the asymptotes of the curve $x^3 + 2x^2y - 4xy^2 + 8y^3 - 4x + 8y - 10 = 0$.

- (b) Find the radius of curvature of the conic $y - x = x^2 + 2xy + y^2$ at the origin.

- (a) Show that the pedal equation of the ellipse

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$

with respect to a focus is

$$\frac{b^2}{p^2} = \frac{2a}{r} - 1$$

- (b) Evaluate :

$$\lim_{x \rightarrow 0} (\cos x)^{\cot^2 x}$$

GROUP—B

Answer any one question.

8. (a) Prove that a necessary condition that the function $f(z) = u + iv$ is differentiable at a point $z_0 = x_0 + iy_0$ is that u_x, u_y, v_x, v_y exist and $u_x = v_y$ and $u_y = -v_x$ at the point (x_0, y_0) .
- (b) Show that the differentiability of a function f at a point implies the continuity at that point.
- (c) Show that $u = x^3 - 3xy^2$ is a harmonic function.

9. (a) Define harmonic function. Show that if $f(z) = u + iv$ is an analytic function, then u and v are both harmonic functions.

- (b) If $f(z)$ is analytic in a region G and $f'(z) = 0$, then prove that f is a constant.

- (c) Show that $f(z) = \operatorname{Im}(z)$ is not differentiable.

[BENGALI VERSION]

বিভাগ—ক

১ নং প্রশ্ন এবং অপর যে-কোন চারটি প্রশ্নের উত্তর দাও।

২×৪=৮

২ নং-কোন চারটি প্রশ্নের উত্তর দাও :

- (ক) $r = a(1 + \cos\theta)$ বক্রটির pedal সমীকরণ বের কর।

(খ) যদি

$$u = f\left(\frac{y}{x}\right)$$

হয়, তবে দেখাও যে

$$x \frac{\partial u}{\partial x} + y \frac{\partial u}{\partial y} = 0$$

(গ) প্রমাণ কর

$$\left\{ \frac{3n+1}{n+2} \right\}$$

অনুক্রমটি সীমাবদ্ধ।

(ঘ) L'Hospital নিয়ম প্রয়োগ করে দেখাও যে

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin^2 x}{x^2} = 1$$

(ঙ) যদি $u = x^y$ হয়, তবে প্রমাণ কর যে

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 u}{\partial y \partial x}$$

(চ) অশূন্য set-এর সীমাবিন্দুর সংজ্ঞা দাও। Z setটির সীমাবিন্দু নির্ণয় কর।

২। (ক) যদি

$$y = \frac{\sin^{-1} x}{\sqrt{1-x^2}}, \quad |x| < 1$$

হয়, তবে দেখাও যে

$$(1-x^2)y_{n+2} - (2n+3)xy_{n+1} - (n+1)^2y_n =$$

(খ) দেখাও যে

$$\left\{ \left(1 + \frac{1}{n} \right)^{n+1} \right\}$$

অনুক্রমটি সমক্রমী (monotonic) এবং এর সীমামান e .৩। (ক) Lagrange-এর mean value theoremটি
বিবৃত কর এবং প্রমাণ কর।

(খ) নিম্নলিখিত শ্রেণীর অভিসারিত্ব পরীক্ষা কর :

$$1 + \frac{1}{1!} + \frac{2^2}{2!} + \frac{3^3}{3!} + \dots$$

৪। (ক) যদি

$$u = \sin^{-1} \left(\frac{x^2 + y^2}{x + y} \right)$$

হয়, তবে দেখাও যে

$$x \frac{\partial u}{\partial x} + y \frac{\partial u}{\partial y} = \tan u$$

(খ) যদি

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{xy(x^2 - y^2)}{x^2 + y^2}, & \text{যখন } (x, y) \neq (0, 0) \\ 0, & \text{যখন } (x, y) = (0, 0) \end{cases}$$

হয়, তবে দেখাও যে $f_{xy}(0, 0) \neq f_{yx}(0, 0)$.(ক) x -এর মান নির্ণয় কর, যখন
 $2x^3 - 21x^2 + 36x - 20$ চরম অথবা অবম হয়।
রাশিমালাটির চরম ও অবম মানও নির্ণয় কর।(খ) $A\alpha^2 + B\alpha + C = 0$ সরলরেখাগুলোর (family of
straight lines) পরিস্পর্শক (envelope) নির্ণয়
কর, যেখানে α হল একটি পরিবর্তনশীল প্রাচল এবং
 A, B, C হল x, y -এর এক্ষেপ অপেক্ষক।(ক) $x^3 + 2x^2y - 4xy^2 + 8y^3 - 4x + 8y - 10 = 0$
বক্রের স্পর্শপ্রবণরেখা (asymptote) গুলি নির্ণয় কর।(খ) মূল বিদ্যুতে $y - x = x^2 + 2xy + y^2$ কনিক
(conic)-এর বক্রতা ব্যাসার্ধ (radius of
curvature) নির্ণয় কর।

(ক) দেখাও যে

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$

উপবৃত্তটির নাভির সাপেক্ষে pedal সমীকরণটি হয়

$$\frac{b^2}{p^2} = \frac{2a}{r} - 1$$

(খ) মান নির্ণয় কর :

$$\lim_{x \rightarrow 0} (\cos x)^{\cot^2 x}$$

विभाग-थ

ये-कोन एकटि प्रश्नर उत्तर दाओ ।

- ८। (क) प्रमाण कर ये $f(z) = u + iv$ अपेक्षक $z_0 = x_0 + iy_0$ बिन्दुते अन्तरकनयोगा (differentiable) हुओर प्रयोजनीय शर्त हल, (x_0, y_0) बिन्दुते u_x, u_y, v_x, v_y विद्यमान एव $u_x = v_y$ ओ $u_y = -v_x$.
- (ख) देखाओ ये कोन एकटि बिन्दुते अपेक्षक f -एर अन्तरकनयोगाता (differentiability) परोक्षतावे सेह बिन्दुते सातुता (continuity) प्रकाश करे ।
- (ग) देखाओ ये $u = x^3 - 3xy^2$ एकटि हराथक अपेक्षक (harmonic function).
- ९। (क) हराथक अपेक्षक (harmonic function)-एर संज्ञा दाओ । यदि $f(z) = u + iv$ एकटि विस्लेषणयोगा अपेक्षक (analytic function) ह्य, तवे देखाओ ये u एव v उभयहै हराथक अपेक्षक ।
- (ख) यदि G क्षेत्रे $f(z)$ विस्लेषणयोगा एव $f'(z) = 0$ ह्य, तवे प्रमाण कर ये f एकटि क्षवक ।
- (ग) देखाओ ये $f(z) = \text{Im}(z)$ अन्तरकनयोगा नय ।

[NEPALI VERSION]

समूह-क

- प्रश्न न० १ अनि रहलबाट कुनै चारवटा प्रश्नका उत्तर देऊ ।
- ने चारवटा प्रश्नका उत्तर देऊ : $२ \times ४ = ८$
- (क) वक्र $r = a(1 + \cos \theta)$ को पदिक समीकरण निर्णय गर ।

(ख) यदि

$$u = f\left(\frac{y}{x}\right)$$

भए प्रमाण गर

$$x \frac{\partial u}{\partial x} + y \frac{\partial u}{\partial y} = 0$$

(ग) अनुक्रम

$$\left\{ \frac{3n+1}{n+2} \right\}$$

सीमाबद्ध छ भनी प्रमाण गर ।

(घ) L'Hospital नियम द्वारा प्रमाण गर

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin^2 x}{x^2} = 1$$

(ङ) यदि $u = x^y$ भए प्रमाण गर

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 u}{\partial y \partial x}$$

(च) एउटा नित्तो सेटको सीमा बिन्दु भन्नाले के बुझिन्छ?
सेट $\mathbb{Z}$ को सीमा बिन्दु निर्णय गर ।

२. (क) यदि

$$y = \frac{\sin^{-1} x}{\sqrt{1-x^2}}, \quad |x| < 1$$

भए प्रमाण गर

$$(1-x^2)y_{n+2} - (2n+3)xy_{n+1} - (n+1)^2y_n = 0$$

(ख) अनुक्रम

$$\left\{ \left(1 + \frac{1}{n} \right)^{n+1} \right\}$$

एकतानी छम् अनि यसको सीमा e हो भनी प्रमाण गर।

३. (क) Lagrange को मध्यमान उपपाद्य उल्लेख अनि प्रमाण गर।

(ख) श्रेणीक्रम

$$1 + \frac{1}{1!} + \frac{2^2}{2!} + \frac{3^3}{3!} + \dots$$

को अभिकेन्द्रनको जाँच गर।

४. (क) यदि

$$u = \sin^{-1} \left(\frac{x^2 + y^2}{x + y} \right)$$

भए प्रमाण गर

$$x \frac{\partial u}{\partial x} + y \frac{\partial u}{\partial y} = \tan u$$

(ग) यदि

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{xy(x^2 - y^2)}{x^2 + y^2}, & \text{जब } (x, y) \neq (0, 0) \\ 0, & \text{जब } (x, y) = (0, 0) \end{cases}$$

भए प्रमाण गर $f_{xy}(0, 0) \neq f_{yx}(0, 0)$.(क) $2x^3 - 21x^2 + 36x - 20$ अधिकतम वा न्यूनतम हुने x को मान निर्णय गर। साथै यसको अधिकतम अनि न्यूनतम मानहरू निर्णय गर।(ख) α एउटा प्राचल अनि A, B, C चाहिँ x, y को रेखिक फलन भए सल रेखाहरूको समूह $A\alpha^2 + B\alpha + C = 0$ को परिस्पर्शक (envelope) निर्णय गर।

(क) वक्र

$$x^3 + 2x^2y - 4xy^2 + 8y^3 - 4x + 8y - 10 = 0$$

को अनन्त-स्पर्शकहरू निर्णय गर।

(ख) शाङ्ख $y - x = x^2 + 2xy + y^2$ को मूलबिन्दुमा वक्रताको व्यासार्ध निर्णय गर।

(क) नाभि (Focus) को सापेक्षमा अण्डवृत्त

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$

को पदिक समीकरण

$$\frac{b^2}{p^2} = \frac{2a}{r} - 1$$

हुन्छ भनी प्रमाण गर।

(ख) मान निर्णय गर :

$$\lim_{x \rightarrow 0} (\cos x)^{\cot^2 x}$$

समूह—ख

कुनै एक प्रश्नको उत्तर देऊ।

८. (क) यदि फलन $f(z) = u + iv$ बिन्दु $z_0 = x_0 + iy_0$ मा अवकलनीय भए त्यो बिन्दु (x_0, y_0) मा u_x, u_y, v_x, v_y पाउन सकिन्छ अनि $u_x = v_y, u_y = -v_x$ हुन्छ भनी प्रमाण गर।

(ख) फलन f यदि एउटा बिन्दुमा अवकलनीय भए त्यो बिन्दुमा निरन्तर हुन्छ भनी प्रमाण गर।

(ग) $u = x^3 - 3xy^2$ एउटा harmonic फलन हो भनी प्रमाण गर।

९. (क) Harmonic फलनको परिभाषा देऊ। $f(z) = u + iv$ यदि एउटा analytic फलन भए u अनि v दुवै harmonic फलन हुन्छन् भनी प्रमाण गर।

(ख) कुनै क्षेत्र G मा $f(z)$ analytic भए अनि $f'(z) = 0$ भए f एउटा स्थिराङ्क हो भनी प्रमाण गर।

(ग) $f(z) = \text{Im}(z)$ अवकलनीय होइन भनी प्रमाण गर।

2016

MATHEMATICS (General)

FIRST PAPER

[Revised New Syllabus
(For Casual Candidates)]

Time : 2 hours

Full Marks : 50

The figures in the margin indicate full marks.

GROUP—A

Answer Question No. 1 and any two from the rest.

- (a) Express the polynomial $x^3 + 3x^2 + 2$ in terms of $x + 1$. 2
- (b) Show that the transpose of an orthogonal matrix is orthogonal. 2
- (c) Find the amplitude of $-2 + i$. 1
- (a) If $\tan^{-1}(x + iy) = \alpha + i\beta$, where x, y, α, β are real and $(x, y) \neq (0, \pm 1)$, then prove that $x^2 + y^2 + 2x \cot 2\alpha = 1$. 5
- (b) Find the general solution of $\cos z = \frac{1}{2}$. 5

M16/327

(Turn Over)

3. (a) Form the equation whose roots are the squared differences of the roots of the equation $x^3 - 7x + 6 = 0$.

(b) If $\cos(u+iv) = x+iy$, then prove that

$$\frac{x^2}{\cos^2 u} - \frac{y^2}{\sin^2 u} = 1$$

4. (a) Find the rank of the following matrix :

$$\begin{pmatrix} 6 & 1 & 3 & 8 \\ 4 & 2 & 6 & -1 \\ 10 & 3 & 9 & 7 \\ 16 & 4 & 12 & 15 \end{pmatrix}$$

(b) If

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 3 & 1 & 0 \\ -2 & 1 & 4 \end{bmatrix}$$

then show that $A^3 - 5A^2 + 6A - 5I = 0$.
Hence, find the value of A^{-1} .

5. (a) Find the conditions that the roots of the equation $x^3 - px^2 + qx - r = 0$ will be in arithmetic progression.
(b) Show that

$$\begin{vmatrix} -2a & a+b & a+c \\ b+a & -2b & b+c \\ c+a & c+b & -2c \end{vmatrix} = 4(b+c)(c+a)(a+b)$$

(Continue)

RM16/327

GROUP—B

Question No. 6 and any **two** from the rest.

- (ii) Show that the system $(\mathbb{Z}, -)$ is not a semigroup, where $\mathbb{Z}$ is the set of all integers. 2

(b) Let

$$S = \{(a, b, c) : a, b, c \in \mathbb{R} \text{ and } a - 2b - 3c = 0\}$$

Show that S is a subspace of the real vector space $\mathbb{R}^3$. 2

- (c) Prove that $A \cap (B - C) = (A \cap B) - (A \cap C)$. 1

- (a) Prove that the set M of all 2×2 non-singular real matrices forms a group under matrix multiplication. 5

- (b) Show that the vectors $(-1, 2, 1)$, $(3, 0, -1)$ and $(-5, 4, 3)$ are linearly dependent in $V_3(\mathbb{R})$. 5

- (a) Show that the intersection of any two subgroups of a group $(G, *)$ is again a subgroup of $(G, *)$. 5

- (b) Prove that the set Q^+ of all positive rational numbers forms an abelian group for the composition ' $\circ$ ' defined as $a \circ b = ab/2 \forall a, b \in Q^+$. 5

RM16/327

(Turn Over)

9. (a) Prove that the set C of ordered pairs (a, b) of real numbers is a field under addition and multiplication defined as

$$(a, b) + (c, d) = (a + c, b + d)$$

$$(a, b) \cdot (c, d) = (ac - bd, bc + ad)$$

- (b) Show that a group G is abelian if and only if for all $a, b \in G$, $(ab)^2 = a^2b^2$.

10. (a) Prove that $A \cap (B \Delta C) = (A \cap B) \Delta (A \cap C)$.

- (b) When is a real quadratic form said to be positive definite? Prove that the real quadratic form $ax^2 + bxy + cy^2$ is positive definite if and only if $a > 0$ and $b^2 < 4ac$ ($a, b, c \neq 0$).

[BENGALI VERSION]

বিভাগ—ক

১ নং প্রশ্ন এবং অপর যে-কোন দুটি প্রশ্নের উত্তর দাও।

- (ক) Polynomial $(x^3 + 3x^2 + 2)$ -কে $(x+1)$ -এর সাপেক্ষে প্রকাশ কর। ২

- (খ) দেখাও যে লম্ব-ম্যাট্রিক্স (orthogonal matrix)-এর transpose একটি লম্ব-ম্যাট্রিক্স হয়। ২

- (গ) $(-2 + i)$ -এর amplitude কত হবে? ১

- (ক) $\tan^{-1}(x + iy) = \alpha + i\beta$ হলে প্রমাণ কর যে,
 $x^2 + y^2 + 2x \cot 2\alpha = 1$, যেখানে x, y, α, β
 বাস্তব (real) রাশি এবং $(x, y) \neq (0, \pm 1)$ । ৫

- (খ) $\cos z = \frac{1}{2}$ -এর সাধারণ সমাধান নির্ণয় কর। ৫

- (ক) সেই সমীকরণটি নির্ণয় কর, যার বীজগুলি (roots) হবে
 $x^3 - 7x + 6 = 0$ সমীকরণের বীজগুলির পার্থক্যের
 বর্গ (squared differences)। ৫

(খ) $\cos(u+iv) = x+iy$ হলে দেখাও যে

$$\frac{x^2}{\cos^2 u} - \frac{y^2}{\sin^2 u} = 1$$

৪। (ক) নিচের ম্যাট্রিক্সের rank বের কর :

$$\begin{pmatrix} 6 & 1 & 3 & 8 \\ 4 & 2 & 6 & -1 \\ 10 & 3 & 9 & 7 \\ 16 & 4 & 12 & 15 \end{pmatrix}$$

(খ) যদি

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 3 & 1 & 0 \\ -2 & 1 & 4 \end{bmatrix}$$

হয়, প্রমাণ কর যে, $A^3 - 5A^2 + 6A - 5I = 0$.
এবার A^{-1} -এর মান নির্ণয় কর।

৫। (ক) $x^3 - px^2 + qx - r = 0$ সমীকরণের বীজগুলির সমান্তর প্রগতি (AP)-তে থাকার শর্ত বের কর।

(খ) দেখাও যে

$$\begin{vmatrix} -2a & a+b & a+c \\ b+a & -2b & b+c \\ c+a & c+b & -2c \end{vmatrix} = 4(b+c)(c+a)(a+b)$$

বিভাগ—খ

৬ নং প্রশ্ন এবং অপর যে-কোন দুটি প্রশ্নের উত্তর দাও।

(ক) দেখাও যে $(\mathbb{Z}, -)$ একটি semigroup হবে না, যেখানে $\mathbb{Z}$ হল সকল পূর্ণসংখ্যার সেট।

(খ) ধরা যাক $S = \{(a, b, c) : a, b, c \in \mathbb{R} \text{ এবং } a - 2b - 3c = 0\}$, দেখাও যে S হল $\mathbb{R}^3$ -এর subspace.

(গ) দেখাও যে $A \cap (B - C) = (A \cap B) - (A \cap C)$.

(ক) দেখাও যে সকল 2×2 non-singular বাস্তব ম্যাট্রিক্সের সেট M ম্যাট্রিক্স-গুণ (matrix multiplication)-এর সাপেক্ষে একটি group তৈরী করে।

(খ) দেখাও যে $(-1, 2, 1)$, $(3, 0, -1)$ এবং $(-5, 4, 3)$ vectorগুলি $V_3(\mathbb{R})$ -এ রৈখিকভাবে dependent হবে।

(ক) দেখাও যে $(G, *)$ group-এর যে-কোন দুটি subgroup-এর ছেদ (intersection) পুনরায় $(G, *)$ -এর একটি subgroup হবে।

(খ) দেখাও যে সকল ধনাত্মক মূলদ রাশির সেট $\mathbb{Q}^+$ একটি abelian group তৈরী করে (composition 'o'-এর সাপেক্ষে), যেখানে 'o'-কে নিম্নরূপে বর্ণনা করা হয় :

$$a \circ b = ab / 2 \quad \forall a, b \in \mathbb{Q}^+$$

- ७। (क) देखाओ ये वास्तव संख्याओं के क्रमिक जोड़समूह (ordered pairs of real numbers) सेट C एक field तैयारी करते हैं जो जोड़ (addition) एवं गुण (multiplication) निम्नरूपेण परिभाषित :

$$(a, b) + (c, d) = (a + c, b + d) \text{ एवं}$$

$$(a, b) \cdot (c, d) = (ac - bd, bc + ad)$$

- (ख) देखाओ ये एक group G abelian है यदि एवं श्रुत है यदि (if and only if) $a, b \in G$ के लिए $(ab)^2 = a^2b^2$ है।

- १०। (क) प्रमाण करो कि $A \cap (B \Delta C) = (A \cap B) \Delta (A \cap C)$ ।

- (ख) एक real quadratic form-के कथन positive definite बना है? देखाओ ये real quadratic form $ax^2 + bxy + cy^2$ positive definite है यदि एवं श्रुत है यदि (if and only if) $a > 0$ एवं $b^2 < 4ac$ है, $(a, b, c \neq 0)$ ।

[NEPALI VERSION]

समूह—क

प्रश्न नं० १ अनि रहलबाट कुनै दुईवटा प्रश्नका उत्तर देऊ।

- (क) बहुपद (Polynomial) $x^3 + 3x^2 + 2$ लाई $x + 1$ को रूपमा दर्शाऊ। २
- (ख) एउटा लम्बकोणीय मेट्रिक्सको transpose लम्बकोणीय हुन्छ भनी प्रमाण गर। २
- (ग) $-2 + i$ को amplitude निर्णय गर। १
- (क) x, y, α, β वास्तविक अनि $(x, y) \neq (0, \pm 1)$ भए अनि $\tan^{-1}(x + iy) = \alpha + i\beta$ भए प्रमाण गर $x^2 + y^2 + 2x \cot 2\alpha = 1$ । ५
- (ख) $\cos z = \frac{1}{2}$ को सामान्य समाधानहरू निर्णय गर। ५
- (क) समीकरण $x^3 - 7x + 6 = 0$ को मूलहरूको वर्गिक भिन्नता (squared differences) मूल हुने समीकरण निर्णय गर। ५

(ख) यदि $\cos(u + iv) = x + iy$ भए प्रमाण गर

$$\frac{x^2}{\cos^2 u} - \frac{y^2}{\sin^2 u} = 1$$

४. (क) निम्नलिखित मैट्रिक्सका क्रम निर्णय गर :

$$\begin{pmatrix} 6 & 1 & 3 & 8 \\ 4 & 2 & 6 & -1 \\ 10 & 3 & 9 & 7 \\ 16 & 4 & 12 & 15 \end{pmatrix}$$

(ख) यदि

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 3 & 1 & 0 \\ -2 & 1 & 4 \end{bmatrix}$$

भए प्रमाण गर $A^3 - 5A^2 + 6A - 5I = 0$, साथै A^{-1} को मान निर्णय गर।

५. (क) समीकरण $x^3 - px^2 + qx - r = 0$ को मूलहरू अङ्किक (arithmetic) श्रेणीमा हुने परिस्थिति निर्णय गर।

(ख) प्रमाण गर

$$\begin{vmatrix} -2a & a+b & a+c \\ b+a & -2b & b+c \\ c+a & c+b & -2c \end{vmatrix} = 4(b+c)(c+a)(a+b)$$

समूह—ख

प्रश्न नं० ६ अनि रहलबाट कुनै दुईवटा प्रश्नका उत्तर देऊ।

(क) $\mathbb{Z}$ समस्त पूर्णसंख्याहरूको सेट भए $(\mathbb{Z}, -)$ एउटा semigroup हुँदैन भनी प्रमाण गर।

(ख) $S = \{(a, b, c) : a, b, c \in \mathbb{R} \text{ अनि } a - 2b - 3c = 0\}$ वास्तविक सदिशमण्डल $\mathbb{R}^3$ को उपसदिशमण्डल हो भनी प्रमाण गर।

(ग) प्रमाण गर $A \cap (B - C) = (A \cap B) - (A \cap C)$.

(क) मैट्रिक्स गुणनफलसित समस्त 2×2 non-singular वास्तविक मैट्रिक्सहरूको M सेटले एउटा समूह निर्माण गर्छ भनी प्रमाण गर।

(ख) $V_3(\mathbb{R})$ मा सदिशहरू $(-1, 2, 1), (3, 0, -1)$ अनि $(-5, 4, 3)$ रैखिक रूपमा निर्भर छन् भनी प्रमाण गर।

(क) समूह $(G, *)$ को कुनै दुईवटा उपसमूहहरूको intersection $(G, *)$ कै उपसमूह हुन्छ भनी प्रमाण गर।

(ख) समस्त धनात्मक परिमेय (rational) संख्याहरूको सेट Q^+ $a \circ b = ab/2 \forall a, b \in Q^+$ ले परिभाषित गर्ने सम्बन्ध 'o' सँग एउटा क्रमविनिमेय समूह निर्माण गर्छ भनी प्रमाण गर।

B I (Three Year G)
Under 1+1+1 System

2016

MATHEMATICS (General)

SECOND PAPER

[Revised New Syllabus (For Casual
Candidates).]

Time : 2 hours

Full Marks : 50

The figures in the margin indicate full marks.

GROUP—A

Answer Question No. 1 and any five from the rest.

1. Answer any five questions : 2×5=10

(a) What does the equation

$$x^2 - 3xy + 3y^2 + 7x - 18y + 32 = 0$$

become when the origin is moved to the point (4, 5) and the axes are turned through an angle 45°?

(b) Prove that the equation

$$4x^2 + 12xy + 9y^2 + 8x + 12y = 0$$

represents a pair of parallel straight lines and find the distance between them.

१. (क) $(a, b) + (c, d) = (a+c, b+d)$ अति $(a, b) \cdot (c, d) = (ac - bd, bc + ad)$ ले योगफल अति गुणफल परिभाषित गर्छ भने यी योगफल अति गुणफलसँग वास्तविक जोडी संख्याहरू (a, b) को सेट C ले एउटा field निर्माण गर्छ भनी प्रमाण गर।

(ख) $(ab)^2 = a^2b^2 \forall a, b \in G$ भए मात्र समूह G क्रमविनिमेय हुन्छ भनी प्रमाण गर।

१०. (क) प्रमाण गर $A \cap (B \Delta C) = (A \cap B) \Delta (A \cap C)$

(ख) एउटा वास्तविक quadratic form लाई कहिले positive definite भनिन्छ? $a > 0$ अति $b^2 < 4ac$ ($a, b, c \neq 0$) भए मात्र वास्तविक quadratic form $ax^2 + bxy + cy^2$ positive definite हुन्छ भनी प्रमाण गर।

- (c) Prove that the product of the abscissae of the extremities of a focal chord of a parabola is constant.

- (d) Show that the locus of the equation $r^2 - ar \cos 2\theta \sec \theta - 2a^2 = 0$ consists of a straight line and a circle.

- (e) Find the image of the point $(1, -2, 3)$ in the plane $2x - 3y + 2z + 3 = 0$.

- (f) Find the equation of the straight line through the point (α, β, γ) which is parallel to the y -axis.

- (g) Find the equation of the sphere which passes through the points $(1, 0, 0)$, $(0, 1, 0)$, $(0, 0, 1)$ and which touches the plane $2x + 2y - z = 15$.

- (h) Find the values of b and g such that the equation

$$4x^2 + 8xy + by^2 + 2gx + 4y + 1 = 0$$

represents a conic having infinitely many centers.

2. If $ax^2 + 2hxy + by^2$ transforms to

$$a'x'^2 + 2h'x'y' + b'y'^2$$

under rotation of axes x and y , then show that—

$$(i) \quad a + b = a' + b'$$

$$(ii) \quad ab - h^2 = a'b' - h'^2$$

$$(iii) \quad (a-b)^2 + 4h^2 = (a'-b')^2 + 4h'^2$$

RM16/328

$$2+2+1=5$$

(Continued)

1. Find the equation of the image of the line

$$\frac{x-2}{2} = \frac{y-3}{3} = \frac{z-4}{4}$$

in the plane $3x + y - 4z + 21 = 0$.

4. Prove that if one of the pair of straight lines $ax^2 + 2hxy + by^2 = 0$ be perpendicular to one of the pair of straight lines $a'x^2 + 2h'xy + b'y^2 = 0$, then

$$(aa' - bb')^2 + 4(ah' + hb')(a'h + h'b) = 0$$

5. Show that the lines

$$\frac{x}{1} = \frac{y-2}{2} = \frac{z+3}{3}$$

$$\text{and} \quad \frac{x-2}{2} = \frac{y-6}{3} = \frac{z-3}{4}$$

are coplanar. Also find the equation of the plane.

6. Show that the circle

$$x^2 + y^2 + 2g_1x + 2f_1y + c_1 = 0$$

will bisect the circumference of the circle

$$x^2 + y^2 + 2g_2x + 2f_2y + c_2 = 0$$

if

$$2g_2(g_1 - g_2) + 2f_2(f_1 - f_2) = c_1 - c_2$$

RM16/328

(Turn Over)

7. Find the equation of the sphere for which $x^2 + y^2 + z^2 + 2x - 4y + 2z + 5 = 0$, $x - 2y + 3z + 1 = 0$ is a great circle.

8. Show that for the conic

$$\frac{l}{r} = 1 + e \cos \theta$$

the equation to the directrix corresponding to the focus other than the pole is

$$\frac{l}{r} = -\frac{1 - e^2}{1 + e^2} e \cos \theta$$

GROUP—B

Answer any **three** questions :

5×3=15

9. If $\vec{a} + \vec{b} + \vec{c} = \vec{0}$, then prove that

$$\vec{a} \times \vec{b} = \vec{b} \times \vec{c} = \vec{c} \times \vec{a}$$

10. Show that

$$\vec{\alpha} \times (\vec{\beta} \times \vec{\gamma}) + \vec{\beta} \times (\vec{\gamma} \times \vec{\alpha}) + \vec{\gamma} \times (\vec{\alpha} \times \vec{\beta}) = \vec{0}$$

and that the three vectors $\vec{\alpha} \times (\vec{\beta} \times \vec{\gamma})$, $\vec{\beta} \times (\vec{\gamma} \times \vec{\alpha})$, $\vec{\gamma} \times (\vec{\alpha} \times \vec{\beta})$ are coplanar.

11. Find a unit vector in the plane of the vectors $(\hat{i} + 2\hat{j} - \hat{k})$ and $(\hat{i} + \hat{j} - 2\hat{k})$, which is perpendicular to the vector $(2\hat{i} - \hat{j} + \hat{k})$.

12. Show that

$$[\vec{p} \vec{q} \vec{r}][\vec{a} \vec{b} \vec{c}] = \begin{vmatrix} \vec{p} \cdot \vec{a} & \vec{p} \cdot \vec{b} & \vec{p} \cdot \vec{c} \\ \vec{q} \cdot \vec{a} & \vec{q} \cdot \vec{b} & \vec{q} \cdot \vec{c} \\ \vec{r} \cdot \vec{a} & \vec{r} \cdot \vec{b} & \vec{r} \cdot \vec{c} \end{vmatrix}$$

13. A particle, acted on by constant forces $(2\hat{i} + 3\hat{j} - \hat{k})$ and $(3\hat{i} - \hat{j} + 5\hat{k})$, is displaced from the point A(1, 3, 2) to the point B(4, 5, -1). Show that the total work done by the forces is 7 units of work.

বিভাগ-ক

১নং প্রশ্ন এবং যে-কোন পাঁচটি প্রশ্নের উত্তর দাও।

১। যে-কোন পাঁচটি প্রশ্নের উত্তর দাও :

$$2 \times 5 = 10$$

- (ক) মূলবিন্দু যদি (4, 5) বিন্দুতে সরিয়ে আনা যায় এবং অক্ষগুলি যদি 45° কোণে ঘোরানো যায় তবে নিম্নলিখিত সমীকরণটি কিভাবে পরিবর্তিত হবে?

$$x^2 - 3xy + 3y^2 + 7x - 18y + 32 = 0$$

(খ) প্রমাণ কর যে

$$4x^2 + 12xy + 9y^2 + 8x + 12y = 0$$

সমীকরণটি দুটি সমান্তরাল সরলরেখাকে প্রকাশ করে। এদের মধ্যবর্তী দূরত্ব বের কর।

- (গ) প্রমাণ কর যে একটি অধিবৃত্তের নাতিবিন্দুগামী জ্যা-এর দুটি প্রান্তবিন্দুর ভূজদ্বয়ের গুণফল একটি ধ্রুবক।

(ঘ) দেখাও যে

$$r^2 - r \cos 2\theta \sec \theta - 2a^2 = 0$$

এর কেন্দ্রবিন্দু একটি সরলরেখা এবং একটি বৃত্ত দ্বারা গঠিত।

- (ঙ) $2x - 3y + 2z + 3 = 0$ সমতলে (1, -2, 3) বিন্দুটির প্রতিবিম্ব নির্ণয় কর।

- (চ) (α, β, γ) বিন্দুগামী একটি সরলরেখার সমীকরণ নির্ণয় কর যা y -অক্ষের সমান্তরাল।

- (ছ) (1, 0, 0), (0, 1, 0) এবং (0, 0, 1) বিন্দুগামী গোলকের সমীকরণ নির্ণয় কর যা $2x + 2y - z = 15$ সমতলকে স্পর্শ করবে।

- (জ) b এবং g -এর মান নির্ণয় কর যাতে

$$4x^2 + 8xy + by^2 + 2gx + 4y + 1 = 0$$

সমীকরণটি একটি conic-কে প্রকাশ করে যার অসংখ্য কেন্দ্রবিন্দু থাকবে।

- ২। x এবং y -অক্ষ ঘূর্ণনের ফলে যদি $ax^2 + 2hxy + by^2$ পরিবর্তিত হয়ে $a'x'^2 + 2h'x'y' + b'y'^2$ হয়, তবে দেখাও যে

$$(i) a + b = a' + b'$$

$$(ii) ab - h^2 = a'b' - h'^2$$

$$(iii) (a - b)^2 + 4h^2 = (a' - b')^2 + 4h'^2 \quad 2 + 2 + 1 = 5$$

- ৩। $3x + y - 4z + 21 = 0$ সমতলটির উপর

$$\frac{x-2}{2} = \frac{y-3}{3} = \frac{z-4}{4}$$

সরলরেখাটির প্রতিবিম্ব (image)-এর সমীকরণ নির্ণয় কর। ৫

- ৪। যদি $ax^2 + 2hxy + by^2 = 0$ সরলরেখাদ্বয়ের একটি সরলরেখা $a'x^2 + 2h'xy + b'y^2 = 0$ সরলরেখাদ্বয়ের একটি সরলরেখার সাথে লম্ব অবস্থায় থাকে, তবে প্রমাণ কর যে

$$(aa' - bb')^2 + 4(ah' + hb')(a'h + h'b) = 0$$

৫। দেখাও যে

$$\frac{x}{1} = \frac{y-2}{2} = \frac{z+3}{3}$$

এবং $\frac{x-2}{2} = \frac{y-6}{3} = \frac{z-3}{4}$

সরলরেখা দুটি একই সমতলে অবস্থিত। সমতলটির সমীকরণ নির্ণয় কর।

- ৬। দেখাও যে $x^2 + y^2 + 2g_1x + 2f_1y + c_1 = 0$ বৃত্তটি অপর একটি বৃত্ত $x^2 + y^2 + 2g_2x + 2f_2y + c_2 = 0$ -এর পরিধিকে সমদ্বিখণ্ডিত করে, যখন

$$2g_2(g_1 - g_2) + 2f_2(f_1 - f_2) = c_1 - c_2$$

হয়।

- ৭। এমন একটি গোলকের সমীকরণ নির্ণয় কর যার মহাবৃত্ত হবে

$$x^2 + y^2 + z^2 + 2x - 4y + 2z + 5 = 0, \quad x - 2y + 3z + 1 = 0$$

৮। দেখাও যে

$$\frac{l}{r} = 1 + e \cos \theta$$

conic-টির মূলবিন্দু বাদে অপর ন্যূনতম তিনটির সাপেক্ষে যে নিয়মকটি পাওয়া যাবে, তার সমীকরণ হল

$$\frac{l}{r} = -\frac{1-e^2}{1+e^2} e \cos \theta$$

বিভাগ-খ

৯। কোন তিনটি প্রস্থের উত্তর দাও :

৫ × ৩ = ১৫

- ১০। যদি $\vec{a} + \vec{b} + \vec{c} = \vec{0}$ হয়, তবে প্রমাণ কর যে

$$\vec{a} \times \vec{b} = \vec{b} \times \vec{c} = \vec{c} \times \vec{a}$$

১০। দেখাও যে

$$\vec{\alpha} \times (\vec{\beta} \times \vec{\gamma}) + \vec{\beta} \times (\vec{\gamma} \times \vec{\alpha}) + \vec{\gamma} \times (\vec{\alpha} \times \vec{\beta}) = \vec{0}$$

এবং $\vec{\alpha} \times (\vec{\beta} \times \vec{\gamma}), \vec{\beta} \times (\vec{\gamma} \times \vec{\alpha}), \vec{\gamma} \times (\vec{\alpha} \times \vec{\beta})$ ভেক্টর তিনটি একই সমতলে অবস্থিত।

- ১১। $(\hat{i} + 2\hat{j} - \hat{k})$ এবং $(\hat{i} + \hat{j} - 2\hat{k})$ ভেক্টর দুটির সাথে একই সমতলে অবস্থিত একটি একক ভেক্টর নির্ণয় কর যা $(2\hat{i} - \hat{j} + \hat{k})$ ভেক্টরটির সাথে লম্বভাবে অবস্থিত।

१२। प्रश्न ७ ले

$$[\vec{p} \vec{q} \vec{r}] [\vec{a} \vec{b} \vec{c}] = \begin{vmatrix} \vec{p} \cdot \vec{a} & \vec{p} \cdot \vec{b} & \vec{p} \cdot \vec{c} \\ \vec{q} \cdot \vec{a} & \vec{q} \cdot \vec{b} & \vec{q} \cdot \vec{c} \\ \vec{r} \cdot \vec{a} & \vec{r} \cdot \vec{b} & \vec{r} \cdot \vec{c} \end{vmatrix}$$

१३। $(2\hat{i} + 3\hat{j} - \hat{k})$ एवं $(3\hat{i} - \hat{j} + 5\hat{k})$ वन मूटि एकटि कनार उन्नत प्रयोग करार फलन कनातिर $A(1, 3, 2)$ थएक $B(4, 5, -1)$ विभूते सततन हन। प्रश्न ७ ले, वनद्वय ले कार्य सम्पादन करार त ७ एकरक।

RMI6/328

(Continued)

RM16/328

(Turn Over)

[NEPALI VERSION]

समूह—क

प्रश्न नं० १ अनि रहलबाट कुनै पाँचवटा प्रश्नका उत्तर देऊ।

१. कुनै पाँचवटा प्रश्नका उत्तर देऊ : $2 \times 5 = 10$

(क) मूलबिन्दुलाई $(4, 5)$ मा विस्थापित गरे अनि अक्षहरूलाई 45° कोणमा घुमाए, समीकरण

$$x^2 - 3xy + 3y^2 + 7x - 18y + 32 = 0$$

को परिवर्तित रूप निर्णय गर।

(ख) $4x^2 + 12xy + 9y^2 + 8x + 12y = 0$ ले दुईवटा समानान्तर सरलरेखाहरू दिन्छन् भनी प्रमाण गर साथै ती रेखाहरूमाझको दूत्व निर्णय गर।

(ग) कुनै परवलयको नाभिक ज्याको चरम बिन्दुहरूको abscissae को गुणफल स्थिराङ्क हुन्छ भनी प्रमाण गर।

(घ) $r^2 - ar \cos 2\theta \sec \theta - 2a^2 = 0$ को locus ले एउटा सरलरेखा अनि एउटा वृत्त दिन्छ भनी प्रमाण गर।

(ङ) समतल $2x - 3y + 2z + 3 = 0$ मा बिन्दु $(1, -2, 3)$ को प्रतिबिम्ब निर्णय गर।

(च) y -अक्षसँग समानान्तर हुने अनि बिन्दु (α, β, γ) बाट पार हुने सरलरेखाको समीकरण निर्णय गर।

- (छ) समतल $2x + 2y - z = 15$ लाई छुने अनि $(1, 0, 0)$, $(0, 1, 0)$, $(0, 0, 1)$ बिन्दुहरूबाट पार हुने गोलाकारको समीकरण निर्णय गर।

(ज) समीकरण

$$4x^2 + 8xy + by^2 + 2gx + 4y + 1 = 0$$

ले अनन्त केन्द्रहरू भएको शाङ्खव दर्शाउँछ भने b अनि g को मान निर्णय गर।

२. x अनि y अक्षहरूलाई घुमाउँदा $ax^2 + 2hxy + by^2$ को परिवर्तित रूप

$$a'x'^2 + 2h'x'y' + b'y'^2$$

भए प्रमाण गर—

$$(i) a + b = a' + b'$$

$$(ii) ab - h^2 = a'b' - h'^2$$

$$(iii) (a - b)^2 + 4h^2 = (a' - b')^2 + 4h'^2$$

$$2 + 2 + 1 = 5$$

३. समतल $3x + y - 4z + 21 = 0$ मा रेखा

$$\frac{x-2}{2} = \frac{y-3}{3} = \frac{z-4}{4}$$

को प्रतिबिम्बको समीकरण निर्णय गर।

$$ax^2 + 2hxy + by^2 = 0 \text{ को एउटा रेखा } a'x^2 + 2h'xy + b'y^2 = 0$$

को एउटा रेखासँग लम्ब भए प्रमाण गर

$$(aa' - bb')^2 + 4(ab' + hb')(a'h + h'b) = 0$$

५. रेखाहरू

$$\frac{x}{1} = \frac{y-2}{2} = \frac{z+3}{3}$$

$$\text{अनि } \frac{x-2}{2} = \frac{y-6}{3} = \frac{z-3}{4}$$

समतलीय छन् भनी प्रमाण गर अनि त्यो समतलको समीकरण निर्णय गर।

$$६. \text{ वृत्त } x^2 + y^2 + 2g_1x + 2f_1y + c_1 = 0 \text{ ले वृत्त}$$

$$x^2 + y^2 + 2g_2x + 2f_2y + c_2 = 0$$

को परिसीमा (circumference) लाई दुई भागमा विभजित गर्छ भनी प्रमाण गर यदि

$$2g_2(g_1 - g_2) + 2f_2(f_1 - f_2) = c_1 - c_2$$

हुन्छ।

$$७. x^2 + y^2 + z^2 + 2x - 4y + 2z + 5 = 0,$$

$$x - 2y + 3z + 1 = 0$$

महावृत्त (great circle) हुने गोलाकारको समीकरण निर्णय गर।

(14)

८. शाङ्खव $\frac{l}{r} = 1 + e \cos \theta$ को मूलबिन्दुभन्दा अलग नाभिको

अनुरूप directrix को समीकरण $\frac{l}{r} = -\frac{1-e^2}{1+e^2} e \cos \theta$ हो
भनी प्रमाण गर।

समूह—ख

कुनै तीनवटा प्रश्नका उत्तर देऊ :

५ × ३ = १५

९. यदि $\vec{a} + \vec{b} + \vec{c} = \vec{0}$ भए प्रमाण गर

$$\vec{a} \times \vec{b} = \vec{b} \times \vec{c} = \vec{c} \times \vec{a}$$

१०. प्रमाण गर

$$\vec{\alpha} \times (\vec{\beta} \times \vec{\gamma}) + \vec{\beta} \times (\vec{\gamma} \times \vec{\alpha}) + \vec{\gamma} \times (\vec{\alpha} \times \vec{\beta}) = \vec{0}$$

अनि तीन सदिशहरू $\vec{\alpha} \times (\vec{\beta} \times \vec{\gamma})$, $\vec{\beta} \times (\vec{\gamma} \times \vec{\alpha})$, $\vec{\gamma} \times (\vec{\alpha} \times \vec{\beta})$
समतलीय छन् भनी प्रमाण गर।

११. सदिशहरू $(\vec{i} + 2\vec{j} - \vec{k})$ अनि $(\vec{i} + \vec{j} - 2\vec{k})$ को समतलमा एउटा
एकाई सदिश निर्णय गर जो सदिश $(2\vec{i} - \vec{j} + \vec{k})$ सँग लम्ब छ।

RM16/328

(Continued)

(15)

११. प्रमाण गर

$$[\vec{p}\vec{q}\vec{r}][\vec{a}\vec{b}\vec{c}] = \begin{vmatrix} \vec{p} \cdot \vec{a} & \vec{p} \cdot \vec{b} & \vec{p} \cdot \vec{c} \\ \vec{q} \cdot \vec{a} & \vec{q} \cdot \vec{b} & \vec{q} \cdot \vec{c} \\ \vec{r} \cdot \vec{a} & \vec{r} \cdot \vec{b} & \vec{r} \cdot \vec{c} \end{vmatrix}$$

११. एउटा कण स्थिर बलहरू $(2\vec{i} + 3\vec{j} - \vec{k})$ अनि
 $(3\vec{i} - \vec{j} + 5\vec{k})$ को प्रभावमा हुँदा बिन्दु $A(1, 3, 2)$ देखि बिन्दु
 $B(4, 5, -1)$ मा विस्थापित भए बलहरूद्वारा गरिएको जम्मा काम
७ एकाई हो भनी प्रमाण गर।

★ ★ ★

RM16—3070/328

2016

MATHEMATICS (General)

THIRD PAPER

[Revised New Syllabus (For Casual
Candidates)]

Full Marks : 50

Time : 2 hours

The figures in the margin indicate full marks.

Answer Question No. 1 and any **four** from the rest.

1. Answer any **five** questions : $2 \times 5 = 10$

(a) If A is closed, then show that $\bar{A} = A$,
where $\bar{A}$ denotes the closure of A .

(b) By using L'Hospital rule, show that

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} x \log x = 0$$

(c) Show by definition that $\left\{ \frac{1}{n} \right\}$ converges

to 0.

RM16/329

(Turn Over)

- (d) Find the asymptotes of the curve
 $xy = c^2, c \neq 0$
- (e) Prove that a convergent sequence is a Cauchy sequence.
- (f) State Cauchy's general principle of convergence for series of real numbers.
- (g) Show that $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} (xy)/(x^2 + y^2)$ does not exist.

2. (a) State and prove Cauchy's MVT.

- (b) If $u = \log r$ and $r^2 = x^2 + y^2 + z^2$, then prove that

$$r^2 \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} \right) = 1$$

3. (a) Show that the function

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{x^2 + y^2}{x^3 + 5y^3}, & (x, y) \neq (0, 0) \\ 0, & (x, y) = (0, 0) \end{cases}$$

is not continuous.

- (b) Given $xy = 4$, find the maximum and minimum values of $4x + 9y$.

RM16/329

(Continued)

4. (a) Test the convergence of the series
 $\frac{1}{1 \cdot 2^2} + \frac{1}{2 \cdot 3^2} + \frac{1}{3 \cdot 4^2} + \dots$

- (b) Evaluate :

$$\lim_{x \rightarrow 1} (1-x) \tan \frac{\pi x}{2}$$

5. (a) State and prove Leibnitz's theorem for differentiation.

- (b) Find the radius of curvature at the origin of the curve $x^4 + y^2 = 6a(x+y)$.

6. (a) Find the envelope of the family of straight lines $y = mx + \sqrt{a^2 m^2 + b^2}$ (parameter m).

- (b) State and prove Euler's theorem for two variables.

7. (a) Find the asymptotes of
 $(x+y)^2 (x+2y+2) = x+9y+2$

- (b) If $p = x \cos \alpha + y \sin \alpha$ touches the curve
 $\left(\frac{x}{a} \right)^{\frac{n}{n-1}} + \left(\frac{y}{b} \right)^{\frac{n}{n-1}} = 1$

then prove that

$$p^n = (a \cos \alpha)^n + (b \sin \alpha)^n$$

RM16/329

(Turn Over)

8. (a) Prove that

$$\frac{x}{1+x} < \log(1+x) < x$$

for all $x > 0$.

(b) Find the angle of intersection of the curves $x^2 - y^2 = a^2$ and $x^2 + y^2 = \sqrt{2}a^2$.

[BENGALI VERSION]

১ নং প্রশ্ন ও অপর যে-কোন চারটি প্রশ্নের উত্তর দাও।

২×৫=১০

১। যে-কোন পাঁচটি প্রশ্নের উত্তর দাও :

(ক) A যদি closed হয়, তবে প্রমাণ কর যে $\bar{A} = A$, যেখানে $\bar{A}$ হল A -এর closure.

(খ) L'Hospital rule-এর সাহায্যে দেখাও যে

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} x \log x = 0$$

(গ) সংজ্ঞার দ্বারা প্রমাণ কর যে $\left\{\frac{1}{n}\right\}$, ০-এর প্রতি অভিসারী

(convergent) হয়।

(ঘ) $xy = c^2$ বক্রের asymptotes-সমূহ নির্ণয় কর।

($c \neq 0$)

(ঙ) দেখাও যে একটি অভিসারী (convergent) sequence সর্বদা Cauchy sequence হবে।

(চ) বাস্তব রাশির (real numbers) series-এর জন্য Cauchy's general principle of convergence বিবৃত কর।

(ছ) দেখাও যে $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} (xy)/(x^2 + y^2)$ এর অস্তিত্ব

নেই।

- ২। (ক) Cauchy's MVT বিবৃত কর এবং প্রমাণ কর।
 (খ) যদি $u = \log r$ এবং $r^2 = x^2 + y^2 + z^2$ হয়, তবে প্রমাণ কর যে

$$r^2 \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} \right) = 1$$

- ৩। (ক) প্রমাণ কর যে নিম্নলিখিত অপেক্ষকটি অসন্তত (not continuous):

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{x^2 + y^2}{x^3 + 5y^3}, & (x, y) \neq (0, 0) \\ 0, & (x, y) = (0, 0) \end{cases}$$

- (খ) যদি $xy = 4$ হয়, তবে $4x + 9y$ এর চরম এবং অবম মান নির্ণয় কর।

- ৪। (ক) নিম্নলিখিত series-এর অভিসারিতা (convergence) পরীক্ষা কর:

$$\frac{1}{1 \cdot 2^2} + \frac{1}{2 \cdot 3^2} + \frac{1}{3 \cdot 4^2} + \dots$$

- (খ) মান নির্ণয় কর:

$$\lim_{x \rightarrow 1} (1-x) \tan \frac{\pi x}{2}$$

- ৫। (ক) অবকলনের Leibnitz-এর উপপাদ্যটি বিবৃত কর এবং প্রমাণ কর।

- (খ) $x^4 + y^2 = 6a(x+y)$ curve-টির বক্রতা ব্যাসার্ধ (radius of curvature) মূলবিন্দুতে নির্ণয় কর।

- ৬। (ক) নিম্নলিখিত সরলরেখাসমূহের (family of straight lines) envelope নির্ণয় কর:

$$y = mx + \sqrt{a^2 m^2 + b^2}, \quad m \text{ একটি প্যারামিটার}$$

- (খ) দুটি চলরাশির জন্য Euler-এর উপপাদ্যটি বিবৃত কর এবং প্রমাণ কর।

- ৭। (ক) নিম্নলিখিত সমীকরণটির অসীম পথ (asymptote)-এর সমীকরণ নির্ণয় কর:

$$(x+y)^2 (x+2y+2) = x+9y+2$$

- (খ) যদি $p = x \cos \alpha + y \sin \alpha$ সরলরেখাটি

$$\left(\frac{x}{a} \right)^{\frac{n}{n-1}} + \left(\frac{y}{b} \right)^{\frac{n}{n-1}} = 1$$

বক্ররেখাকে স্পর্শ করে, তবে প্রমাণ কর যে

$$p^n = (a \cos \alpha)^n + (b \sin \alpha)^n$$

८। (क) प्रमाण कर ल

$$\frac{x}{1+x} < \log(1+x) < x$$

जहाँ $x > 0$.

(घ) $x^2 - y^2 = a^2$ एवं $x^2 + y^2 = \sqrt{2}a^2$ वक्रद्वय
अवर्तुल कोण निर्णय कर।

[NEPALI VERSION]

प्रश्न नं० १ अनि रहलबाट कुनै चारवटा प्रश्नका उत्तर देऊ।

१. कुनै पाँचवटा प्रश्नका उत्तर देऊ :

२×५=१०

(क) A यदि closed भए अनि $\bar{A}$ चाँहि A को closure भए
प्रमाण गर $\bar{A} = A$.

(ख) L'Hospital नियम प्रयोग गरी प्रमाण गर

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} x \log x = 0$$

(ग) परिभाषाको प्रयोग गरी $\left\{ \frac{1}{n} \right\}$ अनुक्रम 0 मा अभिकेन्द्रित हुन्छ
भनी प्रमाण गर।

(घ) वक्र $xy = c^2$ ($c \neq 0$) को अनन्त-स्पर्शकहरू निर्णय गर।

(ङ) अभिकेन्द्रित अनुक्रम एउटा Cauchy अनुक्रम हुन्छ भनी
प्रमाण गर।

(च) वास्तविक संख्याहरूको श्रेणीक्रमको अभिकेन्द्रनको निमित्त
Cauchy-को सामान्य सिद्धान्त उल्लेख गर।

(छ) $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} (xy)/(x^2 + y^2)$ को मान निर्णय गर्न
सकिदैन भनी प्रमाण गर।

२. (क) Cauchy-को MVT उल्लेख अनि प्रमाण गर।

(ख) यदि $u = \log r$ अनि $r^2 = x^2 + y^2 + z^2$ भए प्रमाण गर

$$r^2 \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} \right) = 1$$

३. (क) फलन

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{x^2 + y^2}{x^3 + 5y^3}, & (x, y) \neq (0, 0) \\ 0, & (x, y) = (0, 0) \end{cases}$$

निरन्तर छैन भनी प्रमाण गर।

(ख) $xy = 4$ भए $4x + 9y$ को अधिकतम अनि न्यूनतम मानहरू निर्णय गर।

४. (क) श्रेणीक्रम $\frac{1}{1 \cdot 2^2} + \frac{1}{2 \cdot 3^2} + \frac{1}{3 \cdot 4^2} + \dots$ को अभिकेन्द्रनको जाँच गर।

(ख) $\lim_{x \rightarrow 1} (1-x) \tan \frac{\pi x}{2}$ को मान निर्णय गर।

५. (क) अवकलनको निमित्त Leibnitz-को उपपाद्य उल्लेख अनि प्रमाण गर।

(ख) मूलबिन्दुमा वक्र $x^4 + y^2 = 6a(x+y)$ को वक्रताको व्यासार्ध निर्णय गर।

६. (क) सल रेखाहरूको समूह $y = mx + \sqrt{a^2 m^2 + b^2}$ (m एउटा प्राचल हो) को परिस्पर्शक निर्णय गर।

(ख) द्विचर फलनको निमित्त Euler-को उपपाद्य उल्लेख अनि प्रमाण गर।

७. (क) $(x+y)^2 (x+2y+2) = x+9y+2$ को अनन्त-स्पर्शकहरू निर्णय गर।

(ख) यदि $p = x \cos \alpha + y \sin \alpha$ ले वक्र

$$\left(\frac{x}{a} \right)^{\frac{n}{n-1}} + \left(\frac{y}{b} \right)^{\frac{n}{n-1}} = 1$$

लाई भेट गर्छ भने प्रमाण गर

$$p^n = (a \cos \alpha)^n + (b \sin \alpha)^n$$

८. (क) प्रमाण गर :

$$\frac{x}{1+x} < \log(1+x) < x \quad \forall x > 0$$

(ख) वक्रहरू $x^2 - y^2 = a^2$ अनि $x^2 + y^2 = \sqrt{2}a^2$ को प्रतिच्छेदनको कोण निर्णय गर।

B I (Three Year G)
Under 1+1+1 System

2015

MATHEMATICS (General)

FIRST PAPER

(Syllabus—2015)

Time : 2 hours

Full Marks : 50

The figures in the margin indicate full marks.

GROUP—A

Answer Question No. 1 and any two
from the rest.

1. (a) Find a complex number z , such that

$$\cos z = \frac{1}{2}.$$

2

- (b) Show that the equation

$$x^3 - 3x^2 - 9x + 27 = 0$$

has a multiple root.

1

- (c) Show that the product of two orthogonal
matrices is orthogonal.

2

2. (a) Prove that, $\tan \left\{ i \log \frac{a-ib}{a+ib} \right\} = \frac{2ab}{a^2 - b^2}$. 6

(b) Prove that

$$\begin{vmatrix} -2a & a+b & a+c \\ b+a & -2b & b+c \\ c+a & c+b & -2c \end{vmatrix} = 4(a+b)(b+c)(c+a)$$

3. (a) Apply Descartes' rule of signs to find the nature of the roots of the equation $x^4 + 16x^2 + 6x - 10 = 0$. 4

(b) Solve the following equation by Cardan's method : 6

$$x^3 - 9x + 28 = 0$$

4. (a) If

$$f(x) = \begin{bmatrix} \cos x & -\sin x & 0 \\ \sin x & \cos x & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

then show that $f(x)f(y) = f(x+y)$. 6

(b) Find the rank of the following matrix : 4

$$\begin{bmatrix} 1 & 3 & 5 \\ 2 & 4 & 5 \\ 3 & 7 & 8 \end{bmatrix}$$

5. (a) Solve the following set of equations by matrix method : 4

$$x + y - z = 6$$

$$2x - 3y + z = 1$$

$$2x - 4y + 2z = 1$$

(b) Examine whether the following system of equations is consistent or not : 6

$$2x - 2y + 3z = 2$$

$$x + 2y - 3z = 0$$

$$x - 2y + 3z = 1$$

GROUP—B

Answer Question No. 6 and any two from the rest.

6. (a) Define bijective mapping. Give an example. 2

(b) For any three sets A, B, C, prove that $A - (B \cup C) = (A - B) \cap (A - C)$. 2

(c) Show that the vectors

$$\{(1, -3, 2), (2, 4, 1), (1, 1, 1)\}$$

are linearly independent. 1

7. (a) Show that the set of fourth roots of unity forms an Abelian group with respect to multiplication. 6

(b) Define a subgroup of a group. Prove that intersection of two subgroups of a group is again a subgroup of that group. 4

8. (a) Define a ring. Show that the set of all 2×2 non-singular matrices over rationals is not a ring under matrix addition and multiplication. 6

(b) If $(R, +, \cdot)$ be a ring, then $\forall a, b, c \in R$, show that

$$(i) 0 \cdot a = a \cdot 0 = 0$$

$$(ii) a \cdot (-b) = (-a) \cdot b = -(a \cdot b)$$

9. (a) Define a basis of a vector space V over the field $\mathbb{R}$. Prove that the set of vectors $\{(1, -3, 2), (2, 4, 1), (1, 1, 1)\}$ is a basis of the vector space $\mathbb{R}^3$. 6

(b) If V be a vector space over the field F , U and W are two subspaces of V over F , then show that $\{u + w; u \in U, w \in W\}$ is also a subspace of $V(F)$. 4

10. (a) Find the basis and dimensions of the subspace W of $\mathbb{R}^3$, where

$$W = \{(x_1, x_2, x_3); x_1 + 3x_2 + x_3 = 0, 2x_1 - x_2 + x_3 = 0\}$$

(b) Show that the quadratic form

$$x_1^2 + 2x_2^2 + 2x_3^2 - 2x_1x_2 - 4x_2x_3 + 2x_3x_1$$

is positive semi-definite. 4

বিভাগ-ক

১ নং প্রশ্ন এবং অপর যে-কোন দুটি প্রশ্নের উত্তর দাও।

১। (ক) জটিল রাশি z -এর মান বের কর, যেখানে $\cos z = \frac{1}{2}$. ২

(খ) দেখাও যে $x^3 - 3x^2 - 9x + 27 = 0$ সমীকরণটির একটি multiple root আছে। ১

(গ) দেখাও যে দুটি লম্বকোণীয় ম্যাট্রিক্সের গুণফল একটি লম্বকোণীয় ম্যাট্রিক্স। ২

২। (ক) প্রমাণ কর যে, $\tan\left\{i \log \frac{a-ib}{a+ib}\right\} = \frac{2ab}{a^2 - b^2}$. ১

(খ) প্রমাণ কর যে

$$\begin{vmatrix} -2a & a+b & a+c \\ b+a & -2b & b+c \\ c+a & c+b & -2c \end{vmatrix} = 4(a+b)(b+c)(c+a)$$

৩। (ক) Descartes' rule of signs ব্যবহার করে $x^4 + 16x^2 + 6x - 10 = 0$ সমীকরণের বীজগুলির প্রকৃতি নির্ণয় কর। ৪

(খ) Cardan's method-এর সাহায্যে নিম্নলিখিত সমীকরণটি সমাধান কর :

$$x^3 - 9x + 28 = 0$$

৪। (ক) যদি

$$f(x) = \begin{bmatrix} \cos x & -\sin x & 0 \\ \sin x & \cos x & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

হয়, তবে দেখাও যে $f(x)f(y) = f(x+y)$.

(খ) নিম্নলিখিত ম্যাট্রিক্সটির র্যাঙ্ক (rank) নির্ণয় কর :

$$\begin{bmatrix} 1 & 3 & 5 \\ 2 & 4 & 5 \\ 3 & 7 & 8 \end{bmatrix}$$

৫। (ক) ম্যাট্রিক্স পদ্ধতির সাহায্যে নিম্নলিখিত সমীকরণগুলি সমাধান কর :

$$x + y - z = 6$$

$$2x - 3y + z = 1$$

$$2x - 4y + 2z = 1$$

(খ) নিম্নলিখিত সমীকরণগুলি সুসংগত কি না পরীক্ষা কর :

$$2x - 2y + 3z = 2$$

$$x + 2y - 3z = 0$$

$$x - 2y + 3z = 1$$

বিভাগ—খ

৬ নং প্রশ্ন এবং অপর যে-কোন দুটি প্রশ্নের উত্তর দাও।

৬। (ক) উদাহরণসহ bijective mapping-এর সংজ্ঞা দাও। ২

(খ) A, B, C যে-কোন তিনটি সেটের জন্য প্রমাণ কর যে, $A - (B \cup C) = (A - B) \cap (A - C)$. ২

(গ) দেখাও যে

$$\{(1, -3, 2), (2, 4, 1), (1, 1, 1)\}$$

ভেক্টর তিনটি রৈখিকভাবে নির্পেক্ষ (linearly independent). ২

৭। (ক) দেখাও যে 1-এর চতুর্থ মূলগুলি (fourth roots of unity) গুণফলের সাপেক্ষে একটি Abelian গ্রুপ গঠন করে। ৬

(খ) একটি গ্রুপের সাবগ্রুপের সংজ্ঞা দাও। প্রমাণ কর যে একটি গ্রুপের দুটি সাবগ্রুপের intersection এই গ্রুপের একটি সাবগ্রুপ হয়। ৪

৮। (ক) Ring-এর সংজ্ঞা দাও। দেখাও যে মূলদ সংখ্যার 2×2 non-singular ম্যাট্রিক্সের সেটটি ম্যাট্রিক্সের যোগফল ও গুণফলের সাপেক্ষে Ring গঠন করে না। ৬(খ) যদি $(R, +, \cdot)$ একটি Ring হয়, তবে দেখাও যে

$$(i) 0 \cdot a = a \cdot 0 = 0$$

$$(ii) a \cdot (-b) = (-a) \cdot b = -(a \cdot b)$$

$$\forall a, b, c \in R.$$

९। (क) $\mathbb{R}$ field-एर उपर एकटि ভেক্টর স্পেস V -এর বেসিস (basis)-এর সংজ্ঞা দাও। প্রমাণ কর যে $\{(1, -3, 2), (2, 4, 1), (1, 1, 1)\}$ সেটটি $\mathbb{R}^3$ ভেক্টর স্পেসের একটি বেসিস (basis) গঠন করে।

(খ) V যদি F field-এর উপর একটি ভেক্টর স্পেস এবং U ও W V -ভেক্টর স্পেসের দুটি সাবস্পেস হয়, তা হলে দেখাও যে $\{u+w; u \in U, w \in W\}$ V -ভেক্টর স্পেসের একটি সাবস্পেস হবে।

১০। (ক) $\mathbb{R}^3$ -এর একটি সাবস্পেস W -এর basis এবং dimension নির্ণয় কর, যেখানে

$$W = \{(x_1, x_2, x_3); x_1 + 3x_2 + x_3 = 0, 2x_1 - x_2 + x_3 = 0\}$$

(খ) দেখাও যে

$$x_1^2 + 2x_2^2 + 2x_3^2 - 2x_1x_2 - 4x_2x_3 + 2x_3x_1$$

দ্বিঘাত আকারটি হল ধনাত্মক semi-definite.

সমূহ—ক

প্রশ্ন নং ১ অনি রহলবাট কুনে দুইবটা প্রশ্নকা উত্তর দেऊ।

১. (ক) $\cos z = \frac{1}{2}$ भए जटिल संख्या (complex number) z निर्णय गर।

(ख) समीकरण $x^3 - 3x^2 - 9x + 27 = 0$ को एउटा बहुल (multiple) मूल छ भनी प्रमाण गर।

(ग) दुईवटा लम्बकोणीय मेट्रिक्सहरूको गुणनफल लम्बकोणीय मेट्रिक्स नै हुन्छ भनी प्रमाण गर।

२. (क) प्रमाण गर $\tan\left[i \log \frac{a-ib}{a+ib}\right] = \frac{2ab}{a^2 - b^2}$.

(ख) प्रमाण गर

$$\begin{vmatrix} -2a & a+b & a+c \\ b+a & -2b & b+c \\ c+a & c+b & -2c \end{vmatrix} = 4(a+b)(b+c)(c+a)$$

३. (क) Descartes' rule of signs द्वारा समीकरण $x^4 + 16x^2 + 6x - 10 = 0$ को मूलहरूको प्रकार व्यक्त गर।

(ख) Cardan-को पद्धतिद्वारा समाधान गर :

$$x^3 - 9x + 28 = 0$$

४. (क) यदि

$$f(x) = \begin{bmatrix} \cos x & -\sin x & 0 \\ \sin x & \cos x & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

भए प्रमाण गर $f(x)f(y) = f(x+y)$.

(ख) मेट्रिक्स

$$\begin{bmatrix} 1 & 3 & 5 \\ 2 & 4 & 5 \\ 3 & 7 & 8 \end{bmatrix}$$

को क्रम (rank) निर्णय गर।

५. (क) मेट्रिक्स पद्धतिद्वारा तलका समीकरणसमूह समाधान गर :

$$x + y - z = 6$$

$$2x - 3y + z = 1$$

$$2x - 4y + 2z = 1$$

(ख) तलका समीकरणसमूह सम्बद्ध (consistent) छन् कि छैनन् जाँच गर :

$$2x - 2y + 3z = 2$$

$$x + 2y - 3z = 0$$

$$x - 2y + 3z = 1$$

समूह—ख

प्रश्न नं० ६ अनि रहलबाट कुनै दुईवटा प्रश्नका उत्तर देऊ।

६. (क) Bijection mapping-को परिभाषा उदाहरणसहित देऊ। २

(ख) A, B, C तीनवटा सेटहरू भए प्रमाण गर $A - (B \cup C) = (A - B) \cap (A - C)$. २

(ग) सदिशहरू $\{(1, -3, 2), (2, 4, 1), (1, 1, 1)\}$ रैखिक रूपले स्वनिर्भर छन् भनी प्रमाण गर। १

७. (क) एकको चौथो (fourth) मूलहरूको सेटले गुणनफलसँग एउटा Abelian [क्रमविनिमेय (commutative)] समूह गठन गर्छ भनी प्रमाण गर। ६

(ख) एउटा समूहको उपसमूह भनेको के हो? एउटा समूहको दुईवटा उपसमूहहरूको intersection पनि त्यो समूहको एउटा उपसमूह हुन्छ भनी प्रमाण गर। ४

८. (क) रिङको परिभाषा देऊ। मेट्रिक्स योजन अनि गुणनको सापेक्षमा सबै 2×2 परिमेय सख्याहरू (rationals)-को non-singular मेट्रिक्सहरूको सेटले रिङ गठन गर्दैन भनी प्रमाण गर। ६

(ख) $(R, +, \cdot)$ एउटा रिङ भए प्रमाण गर $\forall a, b, c \in R$
(i) $0 \cdot a = a \cdot 0 = 0$
(ii) $a \cdot (-b) = -(a \cdot b)$ ४

१. (क) Field $\mathbb{R}$ माथि वर्णन गरिएको सदिशमण्डल V को आधारको परिभाषा देऊ। सदिशहरूको सेट $\{(1, -3, 2), (2, 4, 1), (1, 1, 1)\}$ सदिशमण्डल $\mathbb{R}^3$ को आधार हो भनी प्रमाण गर।

- (ख) U अनि W field F माथि वर्णन गरिएको सदिशमण्डल V को उपसदिशमण्डलहरू हो भने $\{u + w; u \in U, w \in W\}$ पनि $V(F)$ को उपसदिशमण्डल हो भनी प्रमाण गर।

१०. (क) $\mathbb{R}^3$ को उपसदिशमण्डल

$$W = \{(x_1, x_2, x_3); x_1 + 3x_2 + x_3 = 0, 2x_1 - x_2 + x_3 = 0\}$$

को आधार अनि आयाम (dimension) निर्णय गर।

- (ख) Quadratic form

$$x_1^2 + 2x_2^2 + 2x_3^2 - 2x_1x_2 - 4x_2x_3 + 2x_3x_1$$

positive semi-definite हो भनी प्रमाण गर।

★★★

2015

MATHEMATICS (General)

SECOND PAPER

(Syllabus—2015)

Time : 2 hours

Full Marks : 50

The figures in the margin indicate full marks.

GROUP—A

Answer Question No. 1 and any **three** from the rest.

1. Answer any **four** questions : $2 \times 4 = 8$

- (a) If $ax + by$ and $cx + dy$ are changed to $a'x' + b'y'$ and $c'x' + d'y'$ respectively for rotation of axes, then show that $ad - bc = a'd' - b'c'$.

- (b) Find the angle between the lines whose direction ratios are 1, 1, 2 and $\sqrt{3} - 1, -\sqrt{3} - 1, 1$.

- (c) Find the value of k so that the equation

$$x^2 + kxy - 2y^2 + 3y - 1 = 0$$

may represent pair of straight lines.

- (d) Find the equation of the plane through the points (4, 3, 1) and (1, -3, 4), and parallel to the y -axis.

(e) Find the equation of one directrix of the ellipse $4x^2 + 3y^2 = 24$.

(f) Find the values of c for which the plane $x + y + z = c$ touches the sphere $x^2 + y^2 + z^2 - 2x - 2y - 2z - 6 = 0$.

2. (a) Show that the triangle formed by the lines $ax^2 + 2hxy + by^2 = 0$ and $bx + my = 1$ is right-angled, if $(a + b)(al^2 + 2hlm + bm^2) = 0$.

(b) If a line makes angles $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ with the four diagonals of a cube, then prove that

$$\cos^2 \alpha + \cos^2 \beta + \cos^2 \gamma + \cos^2 \delta = \frac{4}{3}$$

3. (a) Show that the locus of poles of tangents to the parabola $ay^2 + 2b^2x = 0$ with respect to the ellipse $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ is the parabola $ay^2 - 2b^2x = 0$.

(b) Prove that the straight lines $\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = k$ and $\frac{x}{a} - \frac{y}{b} = \frac{1}{k}$ always intersect on a hyperbola.

4. (a) Prove that the line $\frac{l}{r} = A \cos \theta + B \sin \theta$ will touch the conic $\frac{l}{r} = 1 - e \cos \theta$, if

$$(Al + e)^2 + B^2 l^2 = 1.$$

(b) Show that the circles $x^2 + y^2 + z^2 - 2x + 3y + 4z - 5 = 0$, $5y + 6z + 1 = 0$ and

$x^2 + y^2 + z^2 - 3x - 4y + 5z - 6 = 0$, $x + y - 7z = 0$ lie on the same sphere and find its equation.

5. (a) Two tangents drawn to $y^2 = 4ax$ meet at angle 45° . Find the locus of their point of intersection.

(b) The direction cosines of two lines are connected by the relations $l - 5m + 3n = 0$ and $7l^2 + 5m^2 - 3n^2 = 0$. Find the angle between them.

6. (a) Show that the straight lines $x = nz + a$, $y = mz + b$ and $x = z + 1$, $y = z + 2$ will be coplanar, if $(a - 1)(m - 1) = (b - 2)(n - 1)$.

(b) Show that the equation of the plane containing the straight line $\frac{y}{b} + \frac{z}{c} = 1$,

$x = 0$ and parallel to the straight line $\frac{x}{a} - \frac{y}{b} - \frac{z}{c} + 1 = 0$.

GROUP—B

7. (a) Define vector product of two vectors. 1

(b) Test the coplanarity of the three vectors $\vec{a} = i - 2j + 3k$, $\vec{b} = 2i + 3j - 4k$ and $\vec{c} = -7j + 10k$. 2

8. Answer any **two** questions : 3×2=6

(a) Express $\vec{a}$ as a linear combination of $\vec{b} \times \vec{c}$, $\vec{c} \times \vec{a}$ and $\vec{a} \times \vec{b}$.

(b) Prove that

$$[\vec{a} \vec{b} \vec{c}] = [\vec{b} \vec{c} \vec{a}] = [\vec{c} \vec{a} \vec{b}]$$

(c) A force $(3\vec{i} + \vec{k})$ is acting at the point $(2\vec{i} - \vec{j} + 3\vec{k})$. Find the moment about the point $(\vec{i} + 2\vec{j} - \vec{k})$.

9. Answer any **one** question : 6

(a) Prove, by vector method, the trigonometrical formula

$$\cos C = \frac{a^2 + b^2 - c^2}{2ab}$$

(b) Prove that

$$(\vec{a} \times \vec{b}) \times (\vec{c} \times \vec{d}) = [\vec{a} \vec{b} \vec{d}] \vec{c} - [\vec{a} \vec{b} \vec{c}] \vec{d}$$

[BENGALI VERSION]

বিভাগ—ক

১ নং প্রশ্ন এবং আরও যে-কোন তিনটি প্রশ্নের উত্তর দাও।

১। যে-কোন চারটি প্রশ্নের উত্তর দাও :

$$2 \times 8 = 16$$

(ক) যদি অক্ষসমূহের ঘূর্ণনের ফলে $ax + by$ এবং $cx + dy$ যথাক্রমে $a'x' + b'y'$ এবং $c'x' + d'y'$ -এ পরিবর্তিত হয়, তবে দেখাও যে $ad - bc = a'd' - b'c'$ ।

(খ) সরলরেখা দুটির মধ্যবর্তী কোণ বাহির কর, যেখানে সরলরেখা দুটির direction ratios 1, 1, 2 এবং $\sqrt{3} - 1, -\sqrt{3} - 1, 1$ ।

(গ) k -এর মান নির্ণয় কর, যেখানে $x^2 + kxy - 2y^2 + 3y - 1 = 0$ pair of straight lines-কে নির্দেশ করে।

(ঘ) (4, 3, 1) এবং (1, -3, 4) বিন্দুগামী এবং y -axis-এর সমান্তরাল সমতলটির সমীকরণ বাহির কর।

(ঙ) উপবৃত্ত $4x^2 + 3y^2 = 24$ -এর একটি নির্ণায়কের সমীকরণ বাহির কর।

(চ) c -এর যে সকল মানের জন্য $x + y + z = c$ সমতলটি

$$x^2 + y^2 + z^2 - 2x - 2y - 2z - 6 = 0$$

গোলকটিকে স্পর্শ করে সেগুলির মান বাহির কর।

২। (ক) দেখাও যে সরলরেখাসমূহ $ax^2 + 2hxy + by^2 = 0$ এবং $lx + my = 1$ দ্বারা গঠিত ত্রিভুজটি সমকোণী হবে যদি $(a+b)(al^2 + 2him + bm^2) = 0$ হয়।

(খ) যদি একটি সরলরেখা একটি ঘনকের চারটি কর্ণের সাথে $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ কোণ করে, তবে প্রমাণ কর যে

$$\cos^2 \alpha + \cos^2 \beta + \cos^2 \gamma + \cos^2 \delta = \frac{4}{3}$$

৩। (ক) দেখাও যে, $ay^2 + 2b^2x = 0$ অধিবৃত্তের

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$
 উপবৃত্তের সাপেক্ষে স্পর্শকসমূহের

মেকবিদ্যুসমূহের সঙ্গরপথ হয় $ay^2 - 2b^2x = 0$ অধিবৃত্ত।

(খ) প্রমাণ কর যে $\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = k$ এবং $\frac{x}{a} - \frac{y}{b} = \frac{1}{k}$

সরলরেখাদ্বয় সবসময় একটি পরাবৃত্তে ছেদ করে।

৪। (ক) প্রমাণ কর যে $\frac{l}{r} = A \cos \theta + B \sin \theta$ সরলরেখাটি

$\frac{l}{r} = 1 - e \cos \theta$ শাংকবটিকে স্পর্শ করে, যদি $(Al + e)^2 + B^2 l^2 = 1$ হয়।

(খ) দেখাও যে

$$x^2 + y^2 + z^2 - 2x + 3y + 4z - 5 = 0, 5y + 6z + 1 = 0$$

এবং

$$x^2 + y^2 + z^2 - 3x - 4y + 5z - 6 = 0, x + y - 7z = 0$$

বৃত্তদ্বয় একই গোলের উপর অবস্থিত এবং এর সমীকরণ নির্ণয় কর।

৫। (ক) $y^2 = 4ax$ অধিবৃত্তের স্পর্শকদ্বয় 45° কোণে মিলিত হয়। তাদের মিলিত বিন্দুর সঙ্গরপথের সমীকরণ নির্ণয় কর।

(খ) দুটি সরলরেখার direction cosines $l - 5m + 3n = 0$ এবং $7l^2 + 5m^2 - 3n^2 = 0$ দ্বারা দেওয়া হয়। তাদের মধ্যবর্তী কোণ নির্ণয় কর।

৬। (ক) দেখাও যে, $x = nz + a, y = mz + b$ এবং $x = z + 1, y = z + 2$ সরলরেখাগুলি সমতলীয় হবে, যদি $(a-1)(m-1) = (b-2)(n-1)$ হয়।

(খ) দেখাও যে, যে সমতলটি $\frac{y}{b} + \frac{z}{c} = 1, x = 0$

সরলরেখাটিকে ধারণ করে এবং $\frac{x}{a} - \frac{z}{c} = 1, y = 0$

সরলরেখাটির সমান্তরাল হয়, তার সমীকরণ $\frac{x}{a} - \frac{y}{b} - \frac{z}{c} + 1 = 0$ ।

বিভাগ-খ

৭। (ক) দুটি ভেক্টরের ভেক্টর গুণনের সংজ্ঞা দাও।

(খ) তিনটি ভেক্টর $\vec{a} = i - 2j + 3k, \vec{b} = 2i + 3j - 4k$ এবং $\vec{c} = -7j + 10k$ -এর সামতলিকত্ব পরীক্ষা কর।

৮। যে-কোন দুটি প্রস্থের উত্তর দাও:

(ক) $\vec{a}$ কে $\vec{b} \times \vec{c}, \vec{c} \times \vec{a}$ এবং $\vec{a} \times \vec{b}$ -এর linear combination রূপে ব্যক্ত কর।

(थ) प्रमाण कर ल

$$[\vec{a} \vec{b} \vec{c}] = [\vec{b} \vec{c} \vec{a}] = [\vec{c} \vec{a} \vec{b}]$$

(ग) एकटि वज $(3\vec{i} + \vec{k})$, $(2\vec{i} - \vec{j} + 3\vec{k})$ विन्दुते काज करे । $(\vec{i} + 2\vec{j} - \vec{k})$ विन्दुत साटपरेक एर moment निर्णय कर ।

१। ये-केन एकटि प्रश्नर उत्तर दाउ :
(क) डेडैर पद्धतिरे विक्रानमिति खर्चनाटि प्रमाण कर :

$$\cos C = \frac{a^2 + b^2 - c^2}{2ab}$$

(थ) प्रमाण कर ल

$$(\vec{a} \times \vec{b}) \times (\vec{c} \times \vec{d}) = [\vec{a} \vec{b} \vec{d}] \vec{c} - [\vec{a} \vec{b} \vec{c}] \vec{d}$$

[NEPALI VERSION]

समूह—क

प्रश्न नं० १ अनि रहलबाट कुनै तीनवटा प्रश्नका उत्तर देऊ।

१. कुनै चारवटा प्रश्नका उत्तर देऊ : $2 \times 4 = 8$

(क) अक्षहरूको परिभ्रमण गर्दा यदि $ax + by$ अनि $cx + dy$ क्रमसँगले $a'x' + b'y'$ अनि $c'x' + d'y'$ मा परिवर्तन भए प्रमाण गर $ad - bc = a'd' - b'c'$.

(ख) Direction ratios 1, 1, 2 अनि $\sqrt{3} - 1$, $-\sqrt{3} - 1$, 1 भएको रेखाहरू-माझको कोण निर्णय गर।

(ग) यदि समीकरण $x^2 + kxy - 2y^2 + 3y - 1 = 0$ ले दुईवटा सरलरेखाहरू दिन्छन् भने k को मान निर्णय गर।

(घ) बिन्दुहरू $(4, 3, 1)$ अनि $(1, -3, 4)$ बाट पार हुने अनि y -अक्षसँग समानान्तर हुने समतलको समीकरण निर्णय गर।

(ङ) अण्डवृत्त $4x^2 + 3y^2 = 24$ को एउटा directrix को समीकरण निर्णय गर।

(च) समतल $x + y + z = c$ ले गोल

$$x^2 + y^2 + z^2 - 2x - 2y - 2z - 6 = 0$$

लाई काट्छ भने c को मान निर्णय गर।

२. (क) रेखाहरू $ax^2 + 2hxy + by^2 = 0$ अनि $lx + my = 1$ ले एउटा समकोणीय त्रिकोण गठन गर्छ भनी प्रमाण गर यदि $(a + b)(al^2 + 2hlm + bm^2) = 0$.

(Turn Over)

(ख) यदि एउटा रेखाले एउटा घनको चारवटा विकर्णहरूसँग $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ कोणहरू निर्माण गर्छ भने प्रमाण गर :

$$\cos^2 \alpha + \cos^2 \beta + \cos^2 \gamma + \cos^2 \delta = \frac{4}{3}$$

३. (क) अपडवृत्त $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ को सापेक्षमा परवलय

$ay^2 + 2b^2x = 0$ को स्पर्श-रेखाहरूको मूलहरूको पथ परवलय $ay^2 - 2b^2x = 0$ हुन्छ भनी प्रमाण गर।

(ख) सरलरेखाहरू $\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = k$ अनि $\frac{x}{a} - \frac{y}{b} = \frac{1}{k}$ ले जहिले

पनि एउटा अतिपरवलयलाई प्रतिच्छेद गर्छ भनी प्रमाण गर।

४. (क) यदि $(A+e)^2 + B^2l^2 = 1$ भए रेखा

$\frac{l}{r} = A \cos \theta + B \sin \theta$ ले एउटा शाङ्कव

$\frac{l}{r} = 1 - e \cos \theta$ लाई काट्छ भनी प्रमाण गर।

(ख) वृत्तहरू

$$x^2 + y^2 + z^2 - 2x + 3y + 4z - 5 = 0, 5y + 6z + 1 = 0$$

अनि

$$x^2 + y^2 + z^2 - 3x - 4y + 5z - 6 = 0, x + y - 7z = 0$$

एउटै गोलमा बसेको छ भनी प्रमाण गर अनि त्यो गोलको समीकरण निर्णय गर।

५. (क) परवलय $y^2 = 4ax$ को दुईवटा स्पर्श-रेखाहरू 45° कोणमा भेट भए तिनीहरूको प्रतिच्छेदन बिन्दुको पथ निर्णय गर।

(ख) दुईवटा रेखाहरूको direction cosines यदि $l - 5m + 3n = 0$ अनि $7l^2 + 5m^2 - 3n^2 = 0$ ले दिन्छ भने तिनीहरू-माझको कोणको मान निर्णय गर।

६. (क) सरलरेखाहरू $x = mz + a, y = mz + b$ अनि $x = z + 1, y = z + 2$ समतलीय हुन्छन् भनी प्रमाण गर यदि $(a-1)(m-1) = (b-2)(n-1)$.

(ख) सरलरेखा $\frac{y}{b} + \frac{z}{c} = 1, x = 0$ समावेश हुने अनि

सरलरेखा $\frac{x}{a} - \frac{z}{c} = 1, y = 0$ सँग समानान्तर हुने

समतलको समीकरण $\frac{x}{a} - \frac{y}{b} - \frac{z}{c} + 1 = 0$ हुन्छ भनी

प्रमाण गर।

समूह—ख

७. (क) दुईवटा सदिशहरूको सदिश गुणनफलको परिभाषा देऊ।

(ख) सदिशहरू $\vec{a} = i - 2j + 3k, \vec{b} = 2i + 3j - 4k$ अनि $\vec{c} = -7j + 10k$ समतलीय (coplanar) छन् भनी जाँच गर।

८. कुनै दुईवटा प्रश्नका उत्तर देऊ : $3 \times 2 = 6$

(क) $\vec{a}$ लाई $\vec{b} \times \vec{c}$, $\vec{c} \times \vec{a}$ अनि $\vec{a} \times \vec{b}$ को रेखिक संगठनमा दर्शाउँ।

(ख) प्रमाण गर :

$$[\vec{a} \vec{b} \vec{c}] = [\vec{b} \vec{c} \vec{a}] = [\vec{c} \vec{a} \vec{b}]$$

(ग) यदि बल $(3\hat{i} + \hat{j})$ बिन्दु $(2\hat{i} - \hat{j} + 3\hat{k})$ मा क्रियाशील छ भने बिन्दु $(\hat{i} + 2\hat{j} - \hat{k})$ को सापेक्षमा त्यसको भ्रामक निर्णय गर।

९. कुनै एउटा प्रश्नको उत्तर देऊ :

(क) सदृश पद्धतिद्वारा निम्न त्रिकोणमिति सूत्र प्रमाण गर :

$$\cos C = \frac{a^2 + b^2 - c^2}{2ab}$$

(ख) प्रमाण गर :

$$(\vec{a} \times \vec{b}) \times (\vec{c} \times \vec{d}) = [\vec{a} \vec{b} \vec{d}] \vec{c} - [\vec{a} \vec{b} \vec{c}] \vec{d}$$

★★★

2015

MATHEMATICS (General)

THIRD PAPER

(Syllabus—2015)

Full Marks : 50

Time : 2 hours

The figures in the margin indicate full marks.

GROUP—A

Answer Question No. 1 and any four from the rest.

1. Answer any four questions : $2 \times 4 = 8$

(a) Find the asymptotes of the curve $x^3 + y^3 = 3axy$.

(b) Test the convergence of the series

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n+1}{n+2}$$

(c) Show that the double limit

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{x^2 + y^2}{xy - x^2 - y^2}$$

does not exist.

(d) Show that

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^n}{e^x} = 0$$

- (e) Show that the sequence

$$\left\{ \frac{3n+1}{2n+3} \right\}$$

is bounded.

- (f) Give an example of a function which is continuous at a point but not differentiable at that point.

2. (a) Evaluate :

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x - \sin x}{\tan x - x}$$

- (b) Show that the sequence

$$\{\sqrt{3}, \sqrt{3+\sqrt{3}}, \sqrt{3+\sqrt{3+\sqrt{3}}}, \dots\}$$

tends to a definite limit and find its limit.

3. (a) State and prove Rolle's theorem.

- (b) If $y = a \cos(\log x) + b \sin(\log x)$, then show that

$$x^2 y_{n+2} + (2n+1)xy_{n+1} + (n^2+1)y_n = 0$$

4. (a) Let

$$f(x, y) = x \sin \frac{1}{y} + y \sin \frac{1}{x}, \quad \text{when } xy \neq 0$$

$$= 0, \quad \text{when } xy = 0$$

Prove that

$$\lim_{(x, y) \rightarrow (0, 0)} f(x, y) = 0$$

- (b) Find the largest rectangle that can be inscribed within the ellipse

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$

5. (a) Examine the convergence of the series

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^n}{n!}$$

- (b) Prove that the curves

$$\frac{x^2}{a} + \frac{y^2}{b} = 1 \quad \text{and} \quad \frac{x^2}{c} + \frac{y^2}{d} = 1$$

will intersect orthogonally, if $a + c = b + d$.

6. (a) State and prove Euler's theorem on homogeneous function of two variables.

- (b) Show that

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left[\frac{1}{\sqrt{n^2+1}} + \frac{1}{\sqrt{n^2+2}} + \dots + \frac{1}{\sqrt{n^2+n}} \right] = 1$$

7. (a) Discuss the continuity of the function

$$f(x) = \begin{cases} e^{-\frac{1}{x^2}}, & \text{when } x \neq 0 \\ 1, & \text{when } x = 0 \end{cases}$$

at $x = 0$.

- (b) Show that the envelope of circles whose centres lie on the rectangular hyperbola $xy = c^2$ and which passes through its centre is $(x^2 + y^2)^2 = 16c^2 xy$.

Answer any **one** question.

8. (a) Prove that the function $f(z) = |z|^2$ is continuous everywhere but nowhere differentiable except at the origin. 5

- (b) Show that the function

$$u = \frac{1}{2} \log(x^2 + y^2)$$

is a harmonic function. 2

- (c) Show that the function $f(z) = z^3$ is analytic in a domain D of the complex plane C . 3

9. (a) Show that the function
- $$f(z) = \begin{cases} \frac{x^3(1+i) - y^3(1-i)}{x^2 + y^2}, & \text{for } z = x + iy \neq 0 \\ 0, & \text{for } z = x + iy = 0 \end{cases}$$
- satisfies C-R equations at the origin. 5

- (b) Show that

$$\lim_{z \rightarrow 0} \frac{\bar{z}}{z}$$

does not exist. 3

- (c) Show that the real part of an analytic function satisfies Laplace's equation. 2

বিভাগ—ক

- ১ নং প্রশ্ন এবং অপর যে-কোন চারটি প্রশ্নের উত্তর দাও।
১। যে-কোন চারটি প্রশ্নের উত্তর দাও : $2 \times 8 = ৮$

- (ক) $x^3 + y^3 = 3axy$ বক্রটির asymptote-গুলি বের কর।

- (খ) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n+1}{n+2}$ শ্রেণীটির অভিসারিত্ব পরীক্ষা কর।

- (গ) দেখাও যে যুগ্মসীমা

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{x^2 + y^2}{xy - x^2 - y^2}$$

-টির অস্তিত্ব নেই।

- (ঘ) দেখাও যে

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^n}{e^x} = 0$$

- (ঙ) দেখাও যে

$$\left\{ \frac{3n+1}{2n+3} \right\}$$

অনুক্রমটি সীমাবদ্ধ।

- (চ) একটি অপেক্ষকের উদাহরণ দাও যেটি কোন একটি নির্দিষ্ট বিন্দুতে সন্তুত, কিন্তু সেই বিন্দুতে অবকলনযোগ্য নয়।

২। (ক) মান নির্ণয় কর :

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x - \sin x}{x \tan x - x}$$

(খ) দেখাও যে

$$\{\sqrt{3}, \sqrt{3+\sqrt{3}}, \sqrt{3+\sqrt{3+\sqrt{3}}}, \dots\}$$

অনুক্রমটি অভিসারী এবং এর সীমামান নির্ণয় কর।

৩। (ক) Rolle-এর উপপাদ্যটি বিবৃত কর ও প্রমাণ কর।

(খ) যদি $y = a \cos(\log x) + b \sin(\log x)$ হয়, তবে দেখাও যে

$$x^2 y_{n+2} + (2n+1)xy_{n+1} + (n^2+1)y_n = 0$$

৪। (ক) যদি

$$f(x, y) = x \sin \frac{1}{y} + y \sin \frac{1}{x}, \text{ যখন } xy \neq 0$$

$$= 0, \text{ যখন } xy = 0$$

হয়, তবে প্রমাণ কর যে

$$\lim_{(x, y) \rightarrow (0, 0)} f(x, y) = 0$$

(খ) $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ উপবৃত্তটির অন্তর্লিখিত বৃহত্তম

আয়তক্ষেত্রটি বের কর।

৫। (ক) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^n}{n!}$ শ্রেণীটির অভিসারীত্ব পরীক্ষা কর।

(খ) প্রমাণ কর যে

$$\frac{x^2}{a} + \frac{y^2}{b} = 1 \text{ এবং } \frac{x^2}{c} + \frac{y^2}{d} = 1$$

বক্রদ্বয় পরস্পরকে সমকেন্দ্রীয়ভাবে ছেদ করে, যদি $a+c=b+d$.

৬। (ক) দুটি চলরাশিযুক্ত সমসত্ত্ব অপেক্ষকের জন্য Euler-এর উপপাদ্যটি বিবৃত কর ও প্রমাণ কর।

(খ) দেখাও যে

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left[\frac{1}{\sqrt{n^2+1}} + \frac{1}{\sqrt{n^2+2}} + \dots + \frac{1}{\sqrt{n^2+n}} \right] = 1$$

৭। (ক) নিম্নলিখিত অপেক্ষকটির $x=0$ বিন্দুতে সন্তুততা পর্যালোচনা কর :

$$f(x) = \begin{cases} -\frac{1}{x^2}, & \text{যখন } x \neq 0 \\ 1, & \text{যখন } x = 0 \end{cases}$$

(খ) দেখাও যে, বৃত্তগুলোর envelope যাদের কেন্দ্র সমপরাবৃত্ত $xy = c^2$ -তে অবস্থিত এবং এর কেন্দ্রগামী হয় তার সমীকরণ $(x^2 + y^2)^2 = 16c^2 xy$.

विभाग—थ

ये-कोन एकटि प्रश्नर उडर दाओ।

- ८। (क) प्रमाण कर ये, $f(z) = |z|^2$ अपेक्षकटि सर्वत्र सञ्चुत,
किञ्च शुध्यात्र $(0, 0)$ बिन्दुते अवकलनयोग्या।

(ख) देखाओ ये

$$u = \frac{1}{2} \log(x^2 + y^2)$$

अपेक्षकटि हरायुक्त अपेक्षक।

- (ग) देखाओ ये, $f(z) = z^3$ अपेक्षकटि complex
plane C-एर domain D ते analytic.

९। (क) देखाओ ये

$$f(z) = \begin{cases} \frac{x^3(1+i) - y^3(1-i)}{x^2 + y^2}, & \text{यखन } z = x + iy \neq 0 \\ 0, & \text{यखन } z = x + iy = 0 \end{cases}$$

अपेक्षकटि C-R समीकरणগুলিকে $(0, 0)$ बिन्दुते सिद्ध
करे।

(ख) देखाओ ये

$$\lim_{z \rightarrow 0} \frac{\bar{z}}{z}$$

-एर अस्तित्व नैहै।

- (ग) देखाओ ये, analytic अपेक्षकेर वास्तव अंशटि
Laplace-एर समीकरण सिद्ध करे।

समूह—क

प्रश्न नं० १ अनि रहलबाट कुनै चारवटा प्रश्नका उत्तर देऊ।

१. कुनै चारवटा प्रश्नका उत्तर देऊ :

- (क) वक्र $x^3 + y^3 = 3axy$ को अनन्त-स्पर्शकरहरू निर्णय
गर।

(ख) श्रेणीक्रम

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n+1}{n+2}$$

को अभिकेन्द्रनको जाँच गर।

(ग) युमसीमा (Double limit)

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{x^2 + y^2}{xy - x^2 - y^2}$$

वर्तमान छैनन् भनी प्रमाण गर।

(घ) प्रमाण गर :

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^n}{e^x} = 0$$

(ङ) अनुक्रम

$$\left\{ \frac{3n+1}{2n+3} \right\}$$

परिबद्ध छैन भनी प्रमाण गर।

- (च) एउटा यस्तो फलनको उदाहरण देऊ जो एउटा बिन्दुमा निरन्तर छ तर त्यसो बिन्दुमा अवकलीय छैन।

२. (क) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x - \sin x}{x \tan x - x}$ को मान निर्णय गर।

(ख) अनुक्रम

$$\{\sqrt{3}, \sqrt{3+\sqrt{3}}, \sqrt{3+\sqrt{3+\sqrt{3}}}, \dots\}$$

एउटा निश्चित सीमाप्रति जान्छ भनी प्रमाण गर अनि त्यो सीमा निर्णय गर।

३. (क) Rolle-को उपपाद्य उल्लेख अनि प्रमाण गर।

(ख) यदि $y = a \cos(\log x) + b \sin(\log x)$ भए, प्रमाण गर

$$x^2 y_{n+2} + (2n+1)xy_{n+1} + (n^2+1)y_n = 0$$

४. (क) यदि

$$f(x, y) = x \sin \frac{1}{y} + y \sin \frac{1}{x}, \text{ जब } xy \neq 0$$

$$= 0, \text{ जब } xy = 0$$

भए, प्रमाण गर

$$\lim_{(x, y) \rightarrow (0, 0)} f(x, y) = 0$$

(ख) अण्डवृत्त $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ भित्र कोरिने सबभन्दा ठूलो

समकोणीय चतुर्भुज (rectangle) निर्णय गर।

५. (क) श्रेणीक्रम

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^n}{n!}$$

को अभिकेन्द्रनको जाँच गर।

(ख) वक्रहरू

$$\frac{x^2}{a} + \frac{y^2}{b} = 1 \text{ अनि } \frac{x^2}{c} + \frac{y^2}{d} = 1$$

एका-अर्कोलाई लम्बकोणीय रूपमा प्रतिच्छेदन गर्छ भनी प्रमाण गर यदि $a+c=b+d$ ।

६. (क) द्विचर समाघाती फलनबारे Euler-को उपपाद्य उल्लेख अनि प्रमाण गर।

(ख) प्रमाण गर

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left[\frac{1}{\sqrt{n^2+1}} + \frac{1}{\sqrt{n^2+2}} + \dots + \frac{1}{\sqrt{n^2+n}} \right] = 1$$

७. (क) फलन

$$f(x) = \begin{cases} e^{-\frac{1}{x^2}}, & \text{जब } x \neq 0 \\ 1, & \text{जब } x = 0 \end{cases}$$

को $x=0$ मा निरन्तरताको आलोचना गर।

(ख) समकोणीय अतिपरवलय $xy = c^2$ मा वृत्तसमूहको केन्द्रहरू भएको अनि यसको केन्द्रबाट पार हुने यी वृत्तसमूहको परिस्पर्शक $(x^2 + y^2)^2 = 16c^2 xy$ हो भनी प्रमाण गर।

कुनै एउटा प्रश्नको उत्तर देऊ।

८. (क) फलन $f(z) = |z|^2$ सबै ठाउँमा निरन्तर छन् अनि मूलबिन्दु बाहेक कहीं पनि अवकलनीय छैनन् भनी प्रमाण गर।

(ख) फलन

$$u = \frac{1}{2} \log(x^2 + y^2)$$

एउटा harmonic फलन हुन् भनी प्रमाण गर।

- (ग) जटिल समतल C को प्रान्त D मा फलन $f(z) = z^3$ analytic छन् भनी प्रमाण गर।

९. (क) फलन

$$f(z) = \begin{cases} \frac{x^3(1+i) - y^3(1-i)}{x^2 + y^2}, & \text{जब } z = x + iy \neq 0 \\ 0, & \text{जब } z = x + iy = 0 \end{cases}$$

ले मूलबिन्दुमा C-R समीकरणहरू मानिलिन्छन् भनी प्रमाण गर।

- (ख) $\text{Lt}_{z \rightarrow 0} \bar{z}$ वर्तमान छैनन् भनी प्रमाण गर।

(ग) एउटा analytic फलनको वास्तविक भागले Laplace-को समीकरण पूर्ति गर्छन् भनी प्रमाण गर।

★★★

MATHEMATICS (General)

FIRST PAPER

[Revised New Syllabus (For Casual Candidates)]

Time : 2 hours

Full Marks : 50

The figures in the margin indicate full marks.

GROUP—A

Answer Question No. 1 and any two from the rest.

1. (a) If $z = x + iy$, then prove that $|z - 8| + |z + 8| = 20$ represents an ellipse. 2
- (b) Find the condition that the cubic equation $x^3 - px^2 + qx - r = 0$ should have its roots in GP. 2
- (c) The value of the orthogonal matrix is either 1 or -1. Prove it. 1

(Turn Over)

2. (a) By matrix method, solve the following equations :

$$x + y + z = 8$$

$$x - y + 2z = 6$$

$$3x + 5y - 7z = 14$$

- (b) Prove that

$$\begin{bmatrix} a^2 & 2ab & b^2 \\ b^2 & a^2 & 2ab \\ 2ab & b^2 & a^2 \end{bmatrix}$$

is a perfect square.

3. (a) If $A = \begin{bmatrix} 0 & 2y & z \\ x & y & -z \\ x & -y & z \end{bmatrix}$ is orthogonal matrix,

then find the values of x , y and z .

- (b) Solve the equation $x^3 - 15x - 126 = 0$ by Cardan's method.

4. (a) If $(x^3 + 3px + q)$ has a factor of the form $(x - a)^2$, then show that $q^2 + 4p^3 = 0$.

- (b) Find the rank of the following matrix :

$$\begin{bmatrix} 6 & 1 & 3 & 8 \\ 4 & 2 & 6 & -1 \\ 10 & 3 & 9 & 7 \\ 16 & 4 & 12 & 15 \end{bmatrix}$$

5. (a) If $\tan \log(x + iy) = a + ib$, where $a^2 + b^2 \neq 1$, then show that

$$\tan \log(x^2 + y^2) = \frac{2a}{1 - a^2 - b^2}$$

- (b) If n be a positive integer, then prove that

$$(1 + i)^n + (1 - i)^n = 2^{\frac{n+1}{2}} \cos \frac{n\pi}{4}$$

GROUP—B

Answer Question No. 6 and any two from the rest.

6. (a) Give an example of a non-commutative group.

- (b) Show that

$$S = \left\{ \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \in M_{2 \times 2}(\mathbb{R}) : a + b = 0 \right\}$$

is a subspace of vector space $M_{2 \times 2}(\mathbb{R})$.

- (c) Give an example of a semigroup which is not a group.

7. (a) Show that the set of numbers of the form $a + b\sqrt{3}$, where a and b are rational numbers, is a ring.

- (b) Show that

$S = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x + y + z = 0 \text{ and } 2x - y + z = 0\}$ is a subspace of $\mathbb{R}^3$.

8. (a) Show that the vectors $(1, 2, 1)$, $(2, 1, 0)$ and $(1, -1, 2)$ form a basis of the vector space V_3 over the field of real numbers.

(b) Show that the cube roots of unity form a group under multiplication.

9. (a) For three non-empty sets A, B, C , prove that $A \times (B \cap C) = (A \times B) \cap (A \times C)$.

(b) Show that in a group $(\mathcal{G}, *)$, the equations $a * x = b$ and $y * a = b$ have unique solutions for the unknowns x and y ; the solutions are $x = a^{-1} * b$ and $y = b * a^{-1}$, where $a, b \in \mathcal{G}$.

10. (a) Prove that the quadratic form

$$Q(x_1, x_2, x_3) = x_1^2 + 2x_2^2 + 2x_3^2 + 2x_1x_2 + 2x_1x_3$$

is a positive semidefinite.

(b) Let $(R, +, \cdot)$ be a ring with unity element 1, then show that

$$(i) (-1)a = -a = a(-1), \quad \forall a \in R$$

$$(ii) (-1)(-1) = 1$$

[BENGALI VERSION]

বিভাগ—ক

১নং প্রশ্ন এবং অপর যে-কোন দুটি প্রশ্নের উত্তর দাও।

১। (ক) যদি $z = x + iy$ হয়, তবে প্রমাণ কর যে

$$|z - 8| + |z + 8| = 20$$

একটি উপবৃত্ত।

(খ) $x^3 - px^2 + qx - r = 0$ ত্রিঘাত সমীকরণের বীজগুলি GP-তে থাকার শর্ত নির্ণয় কর।

(গ) প্রমাণ কর যে সমকোণীয় matrix-এর মান হল 1 অথবা -1.

২। (ক) নিম্নলিখিত সমীকরণগুলি matrix পদ্ধতিতে সমাধান কর :

$$x + y + z = 8$$

$$x - y + 2z = 6$$

$$3x + 5y - 7z = 14$$

(খ) প্রমাণ কর যে

$$\begin{vmatrix} a^2 & 2ab & b^2 \\ b^2 & a^2 & 2ab \\ 2ab & b^2 & a^2 \end{vmatrix}$$

একটি পূর্ণবর্গ।

৩। (ক) যদি $A = \begin{pmatrix} 0 & 2y & z \\ x & y & -z \\ x & -y & z \end{pmatrix}$ একটি সমকেলীয় matrix

হয়, তবে x, y এবং z -এর মান নির্ণয় কর।

(খ) Cardan-এর পদ্ধতিতে নিম্নলিখিত সমীকরণের সমাধান কর :

$$x^3 - 15x - 126 = 0$$

৪। (ক) যদি $(x^3 + 3px + q)$ -এর একটি $(x - a)^2$ আকারের উৎপাদক থাকে, তবে দেখাও যে $q^2 + 4p^3 = 0$.

(খ) নিম্নলিখিত matrix-এর rank নির্ণয় কর :

$$\begin{pmatrix} 6 & 1 & 3 & 8 \\ 4 & 2 & 6 & -1 \\ 10 & 3 & 9 & 7 \\ 16 & 4 & 12 & 15 \end{pmatrix}$$

৫। (ক) যদি $\tan \log(x + iy) = a + ib$ হয়, যেখানে $a^2 + b^2 \neq 1$, তবে দেখাও যে

$$\tan \log(x^2 + y^2) = \frac{2a}{1 - a^2 - b^2}$$

(খ) যদি n একটি ধনাত্মক পূর্ণসংখ্যা হয়, তবে প্রমাণ কর যে

$$(1 + i)^n + (1 - i)^n = 2^{\frac{n}{2} + 1} \cos \frac{n\pi}{4}$$

বিভাগ—খ

৬। (ক) একটি non-commutative group-এর উদাহরণ

দাও।

(খ) দেখাও যে

$$S = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in M_{2 \times 2}(\mathbb{R}) : a + b = 0 \right\}$$

হল $M_{2 \times 2}(\mathbb{R})$ ভেক্টর স্পেসের একটি সাবস্পেস।

(গ) Group নয় এমন একটি semigroup-এর উদাহরণ দাও।

৭। (ক) দেখাও যে $a + b\sqrt{3}$ আকারের সংখ্যাগুলির সেট একটি ring গঠন করে, যেখানে a ও b মূলদ সংখ্যা।

(খ) দেখাও যে

$$S = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x + y + z = 0 \text{ and } 2x - y + z = 0\}$$

$\mathbb{R}^3$ -এর একটি সাবস্পেস।

৮। (ক) দেখাও যে $(1, 2, 1), (2, 1, 0)$ এবং $(1, -1, 2)$ ভেক্টরগুলি $V_3(\mathbb{R})$ ভেক্টর স্পেসের একটি বেসিস গঠন করে।

(খ) দেখাও যে 1-এর ঘনমূলের সেটটি গুণফলের সাপেক্ষে একটি গ্রুপ গঠন করে।

२। (क) प्रमाण कर ये $A \times (B \cap C) = (A \times B) \cap (A \times C)$,
येथाने A, B, C श्च जिनिटि non-empty ज्योटे ।

(ख) देखाउ ये $(\mathcal{G}, *)$ group-ए $a * x = b$ एव
 $y * a = b$ समीकरणद्वयस्य केवलभाव एकटि कदम
समाधान आछे एवंग समाधानछलि श्च $x = a^{-1} * b$ उ
 $y = b * a^{-1}$, येथाने $a, b \in \mathcal{G}$.

२०। (क) प्रमाण कर ये

$$Q(x_1, x_2, x_3) = x_1^2 + 2x_2^2 + 2x_3^2 + 2x_1x_2 + 2x_1x_3$$

द्विघात आकारिणि श्च धनात्मक semidefinite.

(ख) $(R, +, \cdot)$ रिङ (ring)-एर unity element 1 श्च,
उत्ते देखाउ ये—

$$(i) (-1)a = -a = a(-1), \forall a \in R;$$

$$(iii) (-1)(-1) = 1.$$

समूह—क

प्रश्न नं० १ अनि रहलबाट कुनै दुईवटा प्रश्नका उत्तर देऊ।

१. (क) यदि $z = x + iy$ भए, $|z - 8| + |z + 8| = 20$ ले
एउटा अण्डवृत्त दर्शाउँछ भनी प्रमाण गर। २

(ख) घनाकार समीकरण $x^3 - px^2 + qx - r = 0$ को मूलहरू
गुणोत्तर श्रेणी (GP) मा हुने परिस्थिति निर्णय गर। २

(ग) लम्बकोणीय मेट्रिक्सको मान 1 अथवा -1 हुन्छ भनी
प्रमाण गर। १

२. (क) निम्न समीकरणहरू मेट्रिक्स पद्धतिद्वारा समाधान गर : ५

$$x + y + z = 8$$

$$x - y + 2z = 6$$

$$3x + 5y - 7z = 14$$

(ख)
$$\begin{bmatrix} a^2 & 2ab & b^2 \\ b^2 & a^2 & 2ab \\ 2ab & b^2 & a^2 \end{bmatrix}$$
 एउटा पूर्ण वर्ग हो भनी प्रमाण गर। ५

३. (क) यदि $A = \begin{bmatrix} 0 & 2y & z \\ x & y & -z \\ x & -y & z \end{bmatrix}$ एउटा लम्बकोणीय मेट्रिक्स भए,
 x, y अनि z को मानहरू निर्णय गर। ५

(ख) Cardan-को पद्धतिद्वारा समाधान गर : ५

$$x^3 - 15x - 126 = 0$$

४. (क) यदि $(x^3 + 3px + q)$ को एउटा गुणनखण्ड $(x - a)^2$ भए, प्रमाण गर $q^2 + 4p^3 = 0$.

(ख) मेट्रिक्स $\begin{pmatrix} 6 & 1 & 3 & 8 \\ 4 & 2 & 6 & -1 \\ 10 & 3 & 9 & 7 \\ 16 & 4 & 12 & 15 \end{pmatrix}$ को क्रम निर्णय गर।

५. (क) यदि $\tan \log(x + iy) = a + ib$ भए, प्रमाण गर

$$\tan \log(x^2 + y^2) = \frac{2a}{1 - a^2 - b^2}$$

जहाँ $a^2 + b^2 \neq 1$.

- (ख) n एउटा धनात्मक पूर्णसंख्या भए, प्रमाण गर

$$(1 + i)^n + (1 - i)^n = 2^{\frac{n}{2} + 1} \cos \frac{n\pi}{4}$$

समूह—ख

प्रश्न नं० ६ अनि रहलबाट कुनै दुईवटा प्रश्नका उत्तर देऊ।

६. (क) क्रमविनिमेय नहुने (non-commutative) एउटा समूहको उदाहरण देऊ।

- (ख) सदिशमण्डल $M_{2 \times 2}(\mathbb{R})$ को

$$S = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in M_{2 \times 2}(\mathbb{R}) : a + b = 0 \right\}$$

एउटा उपसदिशमण्डल हो भनी प्रमाण गर।

- (ग) Group नहुने तर semigroup हुने एउटा उदाहरण देऊ।

७. (क) a अनि b परिमेय संख्याहरू (rational numbers) भए, $a + b\sqrt{3}$ रूपको संख्याहरूको सेट एउटा रिङ हो भनी प्रमाण गर।

- (ख) $S = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x + y + z = 0\}$ अनि $2x - y + z = 0\}$, $\mathbb{R}^3$ को उपमण्डल हो भनी प्रमाण गर।

८. (क) सदिशहरू $(1, 2, 1)$, $(2, 1, 0)$ अनि $(1, -1, 2)$ ले $\mathbb{R}$ माथि वर्णन गरिएको सदिशमण्डल V_3 को एउटा आधार बनाउँछ भनी प्रमाण गर।

- (ख) एकको घनमूलहरूले गुणनफलको सहायताले एउटा समूह बनाउँछ भनी प्रमाण गर।

९. (क) सेटहरू A , B , C ($A \neq \emptyset$, $B \neq \emptyset$, $C \neq \emptyset$) को निम्ति प्रमाण गर :

$$A \times (B \cap C) = (A \times B) \cap (A \times C)$$

- (ख) समूह $(\mathcal{G}, *)$ मा समीकरणहरू $a * x = b$ अनि $y * a = b$ का अद्वितीय समाधानहरू छन् भनी प्रमाण गर अनि ती समाधानहरू $x = a^{-1} * b$ अनि $y = b * a^{-1}$ जहाँ $a, b \in \mathcal{G}$, हुन् भनी प्रमाण गर।

१०. (क) Quadratic form

$$Q(x_1, x_2, x_3) = x_1^2 + 2x_2^2 + 2x_3^2 + 2x_1x_2 + 2x_1x_3$$

positive semidefinite हो भी प्रमाण गर।

(ख) $(R, +, \cdot)$, unity element 1 भएको एउटा रिङ भए

प्रमाण गर :

$$(i) (-1)a = -a = a(-1), \forall a \in R$$

$$(iii) (-1)(-1) = 1$$

2015

MATHEMATICS (General)

SECOND PAPER

[Revised New Syllabus (For Casual
Candidates)]

Time : 2 hours

Full Marks : 50

The figures in the margin indicate full marks.

GROUP—A

Answer Question No. 1 and any five from the rest.

1. Answer any five questions : $2 \times 5 = 10$

(a) If $ax + by$ transforms to $a'x' + b'y'$ due to rotation of axes, then show that

$$a^2 + b^2 = a'^2 + b'^2$$

(b) Prove that the angle between two diagonals of a cube is $\cos^{-1} \frac{1}{3}$.

(c) Find the values of a and g for which the curve $ax^2 + 8xy + 4y^2 + 2gx + 4y + 1 = 0$ represents a conic having no centre.

- (d) Find the equation of the plane passing through the point $(-1, 0, 1)$ and the line of intersection of the planes $4x - 3y + 1 = 0$ and $y - 4z + 13 = 0$.

- (e) Find the nature of the conic

$$\frac{3}{r} = 4 - 2\cos\theta$$

- (f) Determine the value of k for which the plane $x + y + z = k$ is a tangent plane to the sphere $x^2 + y^2 + z^2 = 48$.

- (g) Show that

$$x^2 + 6xy + 9y^2 - 5x - 15y + 6 = 0$$

represents a pair of parallel lines.

2. If the lines $ax^2 + 2hxy + by^2 = 0$ be two sides of a parallelogram and the line $lx + my = 1$ be one of its diagonals, then show that the equation of the other diagonal is

$$y(bl - hm) = x(am - hl)$$

3. A variable plane which is at a constant distance $3p$ from the origin cuts the axes at A, B and C . Show that the locus of the centroid of the triangle ABC is $x^{-2} + y^{-2} + z^{-2} = p^{-2}$.

4. Reduce the equation

$$11x^2 - 4xy + 14y^2 - 58x - 44y + 71 = 0$$

to its canonical form and state the type of the conic.

5. Find the shortest distance between the lines

$$\frac{x-3}{2} = \frac{y+15}{-7} = \frac{z-9}{5} \quad \text{and} \quad \frac{x+1}{2} = \frac{y-1}{1} = \frac{z-9}{-3}$$

6. Show that for the ellipse $\frac{l}{r} = 1 + e\cos\theta$, the equation to the directrix corresponding to focus other than the pole is

$$\frac{l}{r} = -\frac{1-e^2}{1+e^2}e\cos\theta$$

7. Find the equation of the cone whose vertex is at the origin and which contains the curve given by $x^2 - y^2 + 4ax = 0$, $x + y + z = b$.

8. The normal at $(at_1^2, 2at_1)$ meets the parabola $y^2 = 4ax$ again at $(at_2^2, 2at_2)$. Show that

$$t_2 = -t_1 - \frac{2}{t_1}$$

GROUP—B

Answer any **three** questions : $5 \times 3 = 15$

9. If $(\vec{a} \times \vec{b}) + (\vec{b} \times \vec{c}) + (\vec{c} \times \vec{a}) = \vec{0}$, then prove that the vectors $\vec{a}$, $\vec{b}$ and $\vec{c}$ are coplanar.

10. Show that

$$|\vec{a} \times \vec{\beta}|^2 + |\vec{a} \cdot \vec{\beta}|^2 = |\vec{a}|^2 \cdot |\vec{\beta}|^2$$

11. Show by vector method that the perpendiculars from the vertices of a triangle to the opposite sides are concurrent.

12. Show that

$$[\vec{a} \times \vec{b}, \vec{b} \times \vec{c}, \vec{c} \times \vec{a}] = [\vec{a} \vec{b} \vec{c}]^2$$

13. Calculate the moment about the point $P(1, 1, 1)$ of force 5 lb-wt acting along the line $\overline{AB}$, where A and B are the points $(2, 3, 4)$ and $(3, 5, 6)$ respectively. [The distance is measured in feet.]

[BENGALI VERSION]

বিভাগ—ক

১নং প্রশ্ন এবং আরও যে-কোন পাঁচটি প্রশ্নের উত্তর দাও।

১। যে-কোন পাঁচটি প্রশ্নের উত্তর দাও :

$$2 \times 5 = 10$$

- (ক) যদি অক্ষদ্বয়ের ঘূর্ণবর্তের ফলে $ax + by$ রাশি $a'x' + b'y'$ রাশিতে রূপান্তরিত হয়, তবে দেখাও যে

$$a^2 + b^2 = a'^2 + b'^2$$

- (খ) প্রমাণ কর যে, একটি ঘনকের দুটি কর্ণের মধ্যবর্তী কোণ $\cos^{-1} \frac{1}{3}$ ।

- (গ) a এবং g -এর মানগুলো বের কর যার জন্য $ax^2 + 8xy + 4y^2 + 2gx + 4y + 1 = 0$ একটি শাক্ষকে সূচিত করে যার কোন কেন্দ্র নেই।

- (ঘ) $(-1, 0, 1)$ বিন্দুগামী এবং $4x - 3y + 1 = 0$ ও $y - 4z + 13 = 0$ সমতলদ্বয়ের ছেদরেখাগামী সমতলটির সমীকরণ নির্ণয় কর।

- (ঙ) $\frac{3}{r} = 4 - 2\cos\theta$ শাক্ষটির প্রকৃতি নির্ণয় কর।

- (চ) k -এর যে মানের জন্য $x + y + z = k$ সমতলটি $x^2 + y^2 + z^2 = 48$ গোলকটির স্পর্শকতল হবে, তার মান নির্ণয় কর।

- (ছ) দেখাও যে $x^2 + 6xy + 9y^2 - 5x - 15y + 6 = 0$ সমান্তরাল সরলরেখাদ্বয়কে নির্দেশ করে।

২। যদি $ax^2 + 2hxy + by^2 = 0$ সরলরেখাসমূহ একটি সামন্তরিকের বাহুদ্বয়কে সূচিত করে এবং $lx + my = 1$ সরলরেখাটি ঐ সামন্তরিকের একটি কর্ণ হয়, তবে দেখাও যে অন্য কর্ণটি হল $y(bl - hm) = x(am - hl)$.

৩। একটি চল সমতল যা মূলবিন্দু থেকে একটি নির্দিষ্ট দূরত্ব $3p$ -এ অবস্থিত, অক্ষসমূহকে A , B এবং C বিন্দুতে ছেদ করে। দেখাও যে, ত্রিভুজ ABC -এর ভরকেন্দ্রের সঞ্চারণপথ

$$x^{-2} + y^{-2} + z^{-2} = p^{-2}$$

৪। $11x^2 - 4xy + 14y^2 - 58x - 44y + 71 = 0$

সমীকরণটিকে এর আদর্শ আকারে পরিবর্তিত কর এবং এর প্রকারভেদে বিবৃত কর।

৫। $\frac{x-3}{2} = \frac{y+15}{-7} = \frac{z-9}{5}$ এবং $\frac{x+1}{2} = \frac{y-1}{1} = \frac{z-9}{-3}$

রেখাদ্বয়ের মধ্যবর্তী ক্ষুদ্রতম দৈর্ঘ্য নির্ণয় কর।

৬। দেখাও যে $\frac{l}{r} = 1 + e \cos \theta$ উপবৃত্তটির জন্য মেরুবিন্দু ব্যতীত

নাভিবিন্দু সাপেক্ষে নির্ণায়কের সমীকরণ

$$\frac{l}{r} = -\frac{1-e^2}{1+e^2} e \cos \theta$$

৭। একটি শঙ্কুর শীর্ষবিন্দু মূলবিন্দু এবং শঙ্কুটি $x^2 - y^2 + 4ax = 0$, $x + y + z = b$ বক্রগামী। শঙ্কুটির সমীকরণ নির্ণয় কর।

৮। $y^2 = 4ax$ অধিবৃত্তটির $(at_1^2, 2at_1)$ বিন্দুতে অভিলম্বটি অধিবৃত্তিকে আবার $(at_2^2, 2at_2)$ বিন্দুতে ছেদ করে। দেখাও যে

$$t_2 = -t_1 - \frac{2}{t_1}$$

বিভাগ—খ

৯। কোন তিনটি প্রশ্নের উত্তর দাও : $৫ \times ৩ = ১৫$

১০। যদি $(\vec{a} \times \vec{b}) + (\vec{b} \times \vec{c}) + (\vec{c} \times \vec{a}) = \vec{0}$ হয়, তবে প্রমাণ কর যে $\vec{a}$, $\vec{b}$ এবং $\vec{c}$ ভেক্টরসমূহ সমতলীয়।

১০। দেখাও যে

$$|\vec{a} \times \vec{\beta}|^2 + |\vec{a} \cdot \vec{\beta}|^2 = |\vec{a}|^2 \cdot |\vec{\beta}|^2$$

১১। ভেক্টর পদ্ধতিতে দেখাও যে, ত্রিভুজের শীর্ষবিন্দু থেকে বিপরীত বাহুর উপর অঙ্কিত লম্বত্রয় সমবর্তী

১২। দেখাও যে

$$[\vec{a} \times \vec{b}, \vec{b} \times \vec{c}, \vec{c} \times \vec{a}] = [\vec{a} \vec{b} \vec{c}]^2$$

১৩। ৫ পাঁক্ত-ভারের একটি বল $\vec{AB}$ রেখার সাপেক্ষে ক্রিয়াশীল যেখানে A এবং B বিন্দুদ্বয় হল যথাক্রমে $(2, 3, 4)$ ও $(3, 5, 6)$ । $P(1, 1, 1)$ বিন্দুর সাপেক্ষে বলটির ভ্রামক নির্ণয় কর। [দূরত্ব ফুটের সাপেক্ষে নির্ণয় করা হয়।]

समूह—क

प्रश्न नं० १ अनि रहलबाट कुनै पाँचवटा प्रश्नका उत्तर देऊ।

१. कुनै पाँचवटा प्रश्नका उत्तर देऊ : $2 \times 5 = 10$

(क) यदि अक्षहरूलाई परिभ्रमण गर्दा $ax + by$ लाई $a'x' + b'y'$ मा परिवर्तन गराउँछ भने प्रमाण गर

$$a^2 + b^2 = a'^2 + b'^2$$

(ख) एउटा घनको दुईवटा विकर्णहरू-माझको कोण $\cos^{-1} \frac{1}{3}$

हुन्छ भनी प्रमाण गर।

(ग) यदि $ax^2 + 8xy + 4y^2 + 2gx + 4y + 1 = 0$ ले एउटा केन्द्र नभएको शाङ्खव दशाउँछ भने a अनि g का मानहरू निर्णय गर।

(घ) बिन्दु $(-1, 0, 1)$ बाट अनि समतलहरू $4x - 3y + 1 = 0$ अनि $y - 4z + 13 = 0$ को प्रतिच्छेदन रेखाबाट पार हुने समतलको समीकरण निर्णय गर।

(ङ) शाङ्खव $\frac{3}{r} = 4 - 2\cos\theta$ को प्रकृति निर्णय गर।

(च) समतल $x + y + z = k$, गोल $x^2 + y^2 + z^2 = 48$ को स्पर्श-रेखाहरूको समतल भए k को मान निर्णय गर।

(छ) $x^2 + 6xy + 9y^2 - 5x - 15y + 6 = 0$ ले दुईवटा समानान्तर सरलरेखाहरू दिन्छन् भनी प्रमाण गर।

२. यदि $ax^2 + 2hxy + by^2 = 0$ एउटा समानान्तर चतुर्भुजको दुईवटा भुजाहरू भए अनि $lx + my = 1$ एउटा विकर्ण (diagonal) भए अर्को विकर्ण $y(bl - hm) = x(am - hl)$ हुन्छन् भनी प्रमाण गर।

३. एउटा परिवर्तनीय समतल मूलबिन्दुदेखि स्थिर दूरी $3p$ मा छ अनि यसले अक्षहरूलाई A, B अनि C मा प्रतिच्छेदन गर्छ। $\triangle ABC$ को केन्द्रको बिन्दुपथ (locus) $x^{-2} + y^{-2} + z^{-2} = p^{-2}$ हो भनी प्रमाण गर।

४. $11x^2 - 4xy + 14y^2 - 58x - 44y + 71 = 0$

समीकरणलाई मानक रूपमा लघुकृत गर अनि त्यस शाङ्खवको प्रकृति उल्लेख गर।

५. रेखाहरू $\frac{x-3}{2} = \frac{y+15}{-7} = \frac{z-9}{5}$ अनि

$\frac{x+1}{2} = \frac{y-1}{1} = \frac{z-9}{-3}$ माझको सबभन्दा सानो दूरी निर्णय गर।

६. अण्डवृत्त $\frac{l}{r} = 1 + e \cos \theta$ को मूलभन्दा अलग नाभि (focus)-को अनुरूप directrix-को समीकरण

$$\frac{l}{r} = -\frac{1-e^2}{1+e^2} e \cos \theta$$

हो भनी प्रमाण गर।

७. मूलबिन्दुमा शीर्षबिन्दु भएको अनि वक्र $x^2 - y^2 + 4ax = 0$, $x + y + z = b$ समावेश हुने शङ्कुको समीकरण निर्णय गर।

८. $(at_1^2, 2at_1)$ मा कोरिएको अभिलम्ब रेखा (normal) ले पारवलय $y^2 = 4ax$ लाई फेरि $(at_2^2, 2at_2)$ मा काट्छ भने प्रमाण गर

$$t_2 = -t_1 - \frac{2}{t_1}$$

समूह—ख

कुनै तीनवटा प्रश्नका उत्तर देऊ :

$$4 \times 3 = 12$$

९. यदि $(\vec{a} \times \vec{b}) + (\vec{b} \times \vec{c}) + (\vec{c} \times \vec{a}) = \vec{0}$ भए सदिशहरू $\vec{a}$, $\vec{b}$ अनि $\vec{c}$ समतलीय (coplanar) छन् भनी प्रमाण गर।

१०. प्रमाण गर

$$|\vec{\alpha} \times \vec{\beta}|^2 + |\vec{\alpha} \cdot \vec{\beta}|^2 = |\vec{\alpha}|^2 \cdot |\vec{\beta}|^2$$

११. एउटा त्रिकोणको शीर्षबिन्दुहरूदेखि विपरीत भुजाहरूमा कोरिने लम्बहरू समवर्ती (concurrent) हुन्छ भनी सदिश पद्धतिद्वारा प्रमाण गर।

१२. प्रमाण गर

$$[\vec{a} \times \vec{b}, \vec{b} \times \vec{c}, \vec{c} \times \vec{a}] = [\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}]^2$$

१३. यदि A अनि B क्रमैसँगले $(2, 3, 4)$ अनि $(3, 5, 6)$ भए रेखा $\vec{AB}$ को दिशामा क्रियाशील 5 lb-wt बलको बिन्दु $P(1, 1, 1)$ को सापेक्षमा भ्रामक निर्णय गर। [दूरत्व फीटमा नापिएको छ।]

2015

MATHEMATICS (General)

THIRD PAPER

[Revised New Syllabus (For Casual
Candidates)]

Time : 2 hours

Full Marks : 50

The figures in the margin indicate full marks.

Answer Question No. 1 and any **four** from the rest.

1. Answer any **five** questions : $2 \times 5 = 10$

(a) Show that the sequence $\left\{ \frac{3n+1}{n+2} \right\}$ is

monotonically increasing.

(b) Prove that $\sqrt{2}$ is not a rational number.

(c) If $f'(x) = 0 \quad \forall x \in [a, b]$, then show that
 $f(x) = f(b) \quad \forall x \in [a, b]$.

(d) If $f(x, y) = \sin^{-1} \frac{x}{y} + \tan^{-1} \frac{y}{x}$, then show

that

$$x \frac{\partial f}{\partial x} + y \frac{\partial f}{\partial y} = 0$$

- (e) Find the domain of definition of the function $f(x) = \frac{|x-2|}{2-x}$.

- (f) Find the asymptotes of the hyperbola

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$$

- (g) If $f(x) = x|x|$, $x \in \mathbb{R}$, does $f'(0)$ exist?

- (h) Find the pedal equation of the curve $r = e^\theta$.

2. (a) By Cauchy's principle, prove that the sequence $\{x_n\}$, where

$$x_n = 1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \dots + \frac{1}{n!}$$

is convergent.

- (b) Examine the continuity of the function

$$f(x) = \begin{cases} \frac{|x|}{x}, & \text{when } x \neq 0 \\ -1, & \text{when } x = 0 \end{cases}$$

at $x = 0$.

3. (a) Find the envelope of the family of curves

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{k^2 - a^2} = 1$$

where a is the parameter.

- (b) Find the radius of curvature at the origin of the curve $x^4 + y^2 = 6a(x+y)$.

4. (a) State and prove Rolle's theorem.

- (b) Find the asymptotes of the curve

$$(x^2 + y^2)y - 4y^2 + 5x - 7 = 0$$

5. (a) Expand $\sin x$ in powers of x .

- (b) Examine whether $f_{xy} = f_{yx}$, where

$$f(x, y) = \log \left(\frac{x^2 + y^2}{xy} \right)$$

6. (a) State and prove Cauchy's MVT.

- (b) If $y = x^{n-1} \log x$, then prove that

$$y_n = \frac{(n-1)!}{x}$$

7. (a) Show that the function

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{2xy}{x^2 + y^2}, & \text{where } x^2 + y^2 \neq 0 \\ 0, & \text{where } x^2 + y^2 = 0 \end{cases}$$

is not continuous at $(0, 0)$.

- (b) Find the maxima and minima of the following function :

$$f(x, y) = 2(x-y)^2 - x^4 - y^4$$

8. (a) Test the convergence of the following series :

$$\frac{1}{4} + \frac{1.3}{4.7} + \frac{1.3.5}{4.7.10} + \frac{1.3.5.7}{4.7.10.13} + \dots \text{ to } \infty$$

- (b) Evaluate :

$$\lim_{x \rightarrow 0} (\sin x)^{2 \tan x}$$

5

[BENGALI VERSION]

১ নং প্রশ্ন ও অপর যে-কোন চারটি প্রশ্নের উত্তর দাও।

২। যে-কোন পাঁচটি প্রশ্নের উত্তর দাও :

২×৫=১০

(ক) প্রমাণ কর যে, অনুক্রম $\left\{ \frac{3n+1}{n+2} \right\}$ হয় একদিষ্ট বর্ধমান।

(খ) প্রমাণ কর যে, $\sqrt{2}$ মূলদ সংখ্যা নয়।

(গ) যদি $f'(x) = 0 \quad \forall x \in [a, b]$ হয়, তাহলে দেখাও যে

$$f(x) = f(b) \quad \forall x \in [a, b]$$

(ঘ) যদি $f(x, y) = \sin^{-1} x + \tan^{-1} \frac{y}{x}$ হয়, তাহলে দেখাও যে

$$x \frac{\partial f}{\partial x} + y \frac{\partial f}{\partial y} = 0$$

(ঙ) অপেক্ষক $f(x) = \frac{|x-2|}{2-x}$ -এর সংজ্ঞার অঞ্চল নির্ণয় কর।

(চ) $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$ পরাবৃত্তের asymptotes নির্ণয় কর।

(ছ) যদি $f(x) = x|x|$, $x \in \mathbb{R}$ হয়, তাহলে $f'(0)$ -এর অস্তিত্ব প্রমাণ কর।

(জ) $r = e^{\theta}$ বক্রের pedal সমীকরণটি নির্ণয় কর।

২। (ক) Cauchy-র শর্ত ব্যবহার করে sequence $\{x_n\}$ টি অভিসারী কিনা প্রমাণ কর, যেখানে

$$x_n = 1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \dots + \frac{1}{n!}$$

$$(খ) \quad f(x) = \begin{cases} \frac{|x|}{x}, & \text{যখন } x \neq 0 \\ -1, & \text{যখন } x = 0 \end{cases}$$

অপেক্ষকটি সন্তত কিনা যাচাই কর, $x = 0$ বিন্দুতে।

৩। (ক) $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$, যেখানে α হয় একটি চলরাশি, বক্রের envelope-এর সমীকরণ নির্ণয় কর।

(খ) $x^4 + y^2 = 6a(x+y)$ বক্রের শূন্য বিন্দুতে বক্রতা ব্যাসার্ধ নির্ণয় কর।

৪। (ক) Rolle-এর উপপাদ্যটি বিবৃত কর এবং প্রমাণ কর।

(খ) $(x^2 + y^2)y - 4y^2 + 5x - 7 = 0$ বক্রের অসীম পথের সমীকরণগুলি নির্ণয় কর।

৫। (ক) $\sin x$ -এর বিস্তৃতি x -এর যাতের সাপেক্ষে নির্ণয় কর।

(খ) নিম্নলিখিত অপেক্ষকের ক্ষেত্রে দেখাও যে $f_{xy} = f_{yx}$, যেখানে

$$f(x, y) = \log \left(\frac{x^2 + y^2}{xy} \right)$$

৬। (ক) Cauchy-র mean value theorem-এর উপপাদ্যটি বিবৃত কর এবং প্রমাণ কর।

(খ) যদি $y = x^{n-1} \log x$ হয়, তাহলে দেখাও যে

$$y_n = \frac{(n-1)!}{x}$$

৭। (ক) দেখাও যে

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{2xy}{x^2 + y^2}, & \text{যেখানে } x^2 + y^2 \neq 0 \\ 0, & \text{যেখানে } x^2 + y^2 = 0 \end{cases}$$

অপেক্ষকটি $(0, 0)$ বিন্দুতে সন্তত নয়।

(খ) নিম্নলিখিত অপেক্ষকের চরম ও অবম মান নির্ণয় কর :

$$f(x, y) = 2(x-y)^2 - x^4 - y^4$$

८। (क) निम्नलिखित श्रेणीर अभिसारीत्व परीक्षा कर :

$$\frac{1}{4} + \frac{1.3}{4.7} + \frac{1.3.5}{4.7.10} + \frac{1.3.5.7}{4.7.10.13} + \dots \text{ to } \infty$$

(ख) $\lim_{x \rightarrow 0} (\sin x)^2 \tan x$ -को मान निर्णय कर ।

प्रश्न नं० १ अनि रहलबाट कुनै चारवटा प्रश्नका उत्तर देऊ ।

१. कुनै पाँचवटा प्रश्नका उत्तर देऊ :

$$2 \times 4 = 8$$

(क) अनुक्रम $\left\{ \frac{3n+1}{n+2} \right\}$ एकतानी वृद्धिमान हुन्छ भनी प्रमाण गर ।

(ख) $\sqrt{2}$ एउटा परिमेय संख्या (rational number) होइन भनी प्रमाण गर ।

(ग) यदि $f'(x) = 0 \forall x \in [a, b]$ भए, प्रमाण गर

$$f(x) = f(b) \forall x \in [a, b]$$

(घ) यदि $f(x, y) = \sin^{-1} \frac{x}{y} + \tan^{-1} \frac{y}{x}$ भए, प्रमाण गर

$$x \frac{\partial f}{\partial x} + y \frac{\partial f}{\partial y} = 0$$

(ङ) फलन $f(x) = \frac{|x-2|}{2-x}$ को परिभाषा-प्रान्त निर्णय गर ।

(च) अतिपवलय $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$ को अनन्त-स्पर्शकहरू निर्णय गर ।

(छ) यदि $f(x) = x|x|$, $x \in \mathbb{R}$ भए, के $f'(0)$ को मान पाइन्छ?

(ज) वक्र $r = e^\theta$ को पदिक समीकरण निर्णय गर ।

२. (क) $x_n = 1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \dots + \frac{1}{n!}$ भए अनुक्रम $\{x_n\}$ अभिकेन्द्रित हुन्छ भनी Cauchy-को सिद्धान्त प्रयोग गरी प्रमाण गर।

(ख) फलन

$$f(x) = \begin{cases} \frac{|x|}{x}, & \text{जब } x \neq 0 \\ -1, & \text{जब } x = 0 \end{cases}$$

को निरन्तरताको जाँच $x = 0$ मा गर।

३. (क) α प्राचल भए, वक्रसमूह $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \alpha^2 = 1$ को परिस्पर्शक (envelope) निर्णय गर।

- (ख) वक्र $x^4 + y^2 = 6a(x + y)$ को मूलबिन्दुमा वक्रताको व्यासार्ध निर्णय गर।

४. (क) Rolle-को उपाद्य उल्लेख अनि प्रमाण गर।

- (ख) वक्र $(x^2 + y^2)y - 4y^2 + 5x - 7 = 0$ को अनन्त-स्पर्शकहरू निर्णय गर।

५. (क) $\sin x$ लाई x का घातहरूको सापेक्षमा विस्तार गर।

- (ख) $f(x, y) = \log \left(\frac{x^2 + y^2}{xy} \right)$ भए $f_{xy} = f_{yx}$ हुन्छ भनी जाँच गर।

१. (क) Cauchy-को MVT उल्लेख अनि प्रमाण गर।

- (ख) यदि $y = x^{n-1} \log x$ भए, प्रमाण गर

$$y_n = \frac{(n-1)!}{x}$$

७. (क) फलन

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{2xy}{x^2 + y^2}, & \text{जब } x^2 + y^2 \neq 0 \\ 0, & \text{जब } x^2 + y^2 = 0 \end{cases}$$

बिन्दु $(0, 0)$ मा निरन्तर छैन भनी प्रमाण गर।

- (ख) फलन $f(x, y) = 2(x - y)^2 - x^4 - y^4$ को अधिकतम अनि न्यूनतम मानहरू निर्णय गर।

८. (क) श्रेणीक्रम

$$\frac{1}{4} + \frac{1.3}{4.7} + \frac{1.3.5}{4.7.10} + \frac{1.3.5.7}{4.7.10.13} + \dots \text{ to } \infty$$

को अभिकेन्द्रनको जाँच गर।

- (ख) $\lim_{x \rightarrow 0} (\sin x)^{2 \tan x}$ को मान निर्णय गर।
